TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fakultät Mathematik und Naturwissenschaften, Fachrichtung Mathematik, Institut für Algebra

Prof. Ulrike Baumann Henri Mühle Wintersemester 2017/18

2. Übungsblatt zur Vorlesung "Algebra für Informationssystemtechniker"

Graphen

Ü7. Sei M eine endliche Menge, $\mathcal{P}(M)$ ihre Potenzmenge, und $\mathcal{P}_k(M)$ die Menge aller k-elementigen Teilmengen von M. Schreiben Sie für die folgenden Graphen $G = (V, E)$ die jeweiligen Knoten- und Kantenmengen explizit auf und zeichnen Sie ein Graphendiagramm. Geben Sie außerdem die Knotengrade der Knoten an, und finden Sie in jedem Graphen einen Kreis der Länge 6.

(a) $M = \{1, 2, 3, 4\}$; $V = \mathcal{P}_2(M)$; $E = \big\{\{X, Y\} \mid X \neq Y \text{ und } X \cap Y \neq \emptyset\big\}$.

(b) $M = \{1, 2, 3\}$; $V = \mathcal{P}(M)$; $E = \big\{\{X, Y\} \mid |(X \cup Y) \setminus (X \cap Y)| = 1\big\}$.

(c) $M = \{1, 2, 3\}$; $V = \mathcal{P}(M)$; $E = \big\{\{X, Y\} \mid |X \cup Y| \nmid \big(|X| + |Y|\big)\big\}$.

Ü8. Sei $M = \{1, 2, \ldots, n\}$ eine n-elementige Menge. Der *n-dimensionale Würfel* (über M) ist der Graph $Q_n = (V_n, E_n)$ mit den folgenden Eigenschaften:

$$V_n = \mathcal{P}(M);$$
$$E_n = \big\{\{A, B\} \mid A, B \subseteq M, |A \triangle B| = 1\big\}.$$

Dabei ist $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ die symmetrische Differenz von A und B.

(a) Geben Sie für alle $n \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ die Knoten- und Kantenmengen von Q_n explizit an und zeichnen Sie entsprechende Graphendiagramme.

(b) Wie groß sind V_n und E_n (in Abhängigkeit von n)? Beweisen Sie Ihre Vermutung mittels vollständiger Induktion.

(c) Finden Sie je einen Kreis in Q_3 und in Q_4 der alle Knoten enthält.

Ü9. Die folgende Aufgabe stammt von Alkuin, einem Gelehrten am Hof Karls des Großen.

> Eine Person musste einen Fluss überqueren und einen Wolf, eine Ziege und ein Bündel Kohl hinüberbringen. Sie konnte nur ein Boot finden, das außer ihr lediglich eine dieser drei Sachen transportieren konnte. Alles sollte aber unbeschädigt herübergebracht werden. Die Person durfte also weder den Wolf mit der Ziege, noch die Ziege mit dem Kohl unbeaufsichtigt lassen. Wie kann sie das tun?

Hinweis: Stellen Sie die Lösung in einem Graphen dar, dessen Knoten die augenblicklichen Aufenthaltsorte von Person, Wolf, Ziege und Kohl repräsentieren. Kanten zwischen Knoten treten genau dann auf, wenn zwei Zustände durch eine Bootsfahrt ineinander überführbar sind.

A10. **Hausaufgabe, bitte vor Beginn der 3. Übung unter Angabe von Name, Matrikelnummer und Seminargruppe abgeben.**
Für zwei natürliche Zahlen $k, n \geqslant 1$ sei $X = \{1, 2, \ldots, 2n + k\}$. Weiter sei V die Menge aller n-elementigen Teilmengen von X. Es sei $G_{n,k}$ der Graph mit Knotenmenge V, in dem zwei Knoten genau dann durch eine Kante verbunden sind, wenn sie disjunkt sind.

(a) Geben Sie die Knoten- und Kantenmengen der Graphen $G_{1,2}$ und $G_{2,1}$ explizit an, und zeichnen Sie jeweils ein Graphendiagramm.

(b) Bestimmen Sie für die Graphen $G_{2,2}$ und $G_{3,1}$ die Anzahl der Knoten und Kanten, ohne ein Graphendiagramm zu zeichnen.

H11. (a) Zeichnen Sie die Graphendiagramme der vollständigen bipartiten Graphen $K_{4,3}$ und $K_{4,4}$. Geben Sie jeweils die Knoten- und Kantenmenge an.

(b) Finden Sie für jeden der beiden Graphen einen Kreis, der alle Knoten enthält, bzw. begründen Sie, warum ein solcher Kreis nicht existiert.

(c) Begründen Sie, dass ein bipartiter Graph $G(A, B)$ keinen Kreis der Länge 3 enthält.

H12. Beim Schachspiel zieht der Springer immer zwei Felder in eine Richtung und ein Feld senkrecht dazu. Ein *Springerzug* ist eine Folge von Zügen mit einem Springer, sodass jedes Feld eines rechteckigen $m \times n$-Schachbretts genau einmal besucht wird. Erreicht der Springer nach seinem letzten Zug wieder das Ausgangsfeld, heißt der Springerzug *geschlossen*.

Wie lässt sich dieses Problem durch einen Graphen modellieren?

(a) Zeigen Sie, dass auf einem 3×3-Brett kein Springerzug möglich ist.

(b) Zeigen Sie, dass auf einem 4×3-Brett kein geschlossener Springerzug möglich ist. Finden Sie einen Springerzug auf diesem Feld. Welche Startfelder kommen dafür in Frage?

(c) Zeigen Sie, dass auf einem 4×4-Brett kein Springerzug möglich ist.

(d) Finden Sie einen geschlossenen Springerzug auf einem 5×6-Brett. (Dies ist das kleinste Brett, auf dem das möglich ist.)

(e) Zeigen Sie, dass ein geschlossener Springerzug auf einem $m \times n$-Brett nicht möglich ist, wenn m und n beide ungerade sind.

Hinweis: Beziehen Sie in e) die Farbe der Felder mit ein, und verwenden Sie die Überlegungen aus H11 b).