

### 3. Übungsblatt zur Vorlesung "Algebra für Informationssystemtechniker"

#### Bäume

- Ü13. (a) Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass jeder Baum mit  $n \geq 1$  Knoten genau  $n - 1$  Kanten hat.
- (b) Auf einem Fest nehmen  $n \geq 1$  Paare teil. Zu Beginn des Festes begrüßt jeder Teilnehmende jeden anderen Teilnehmenden, mit Ausnahme des eigenen Partners. Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass es dabei zu genau  $2n(n - 1)$  Begrüßungen kommt.

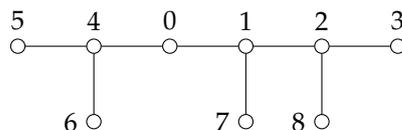
Hinweis: Sie können in (a) verwenden, dass jeder Baum mit  $n \geq 2$  Knoten mindestens ein Blatt, also einen Knoten vom Grad 1, besitzt.

- Ü14. (a) Zeichnen Sie alle Spannbäume des vollständigen, bipartiten Graphen  $K_{m,n}$  für  $m = n = 2$  und  $m = 3, n = 2$ .
- (b) Zeichnen Sie alle Spannbäume des vollständigen Graphen  $K_n$  für  $1 \leq n \leq 4$ . Wie viele Spannbäume besitzt  $K_n$  für beliebiges  $n$ ?
- (c) Es sei  $G$  der Graph, der aus dem  $K_n$  durch das Löschen einer Kante hervorgeht. Wie viele Spannbäume hat  $G$ ?

Hinweis: Bestimmen Sie in (c) zunächst die Anzahl der Spannbäume des  $K_n$ , die eine festgelegte Kante enthalten.

- Ü15. Wir betrachten Bäume mit der Knotenmenge  $V = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ .

- (a) Ermitteln Sie den Prüfer-Code des folgenden Baumes.



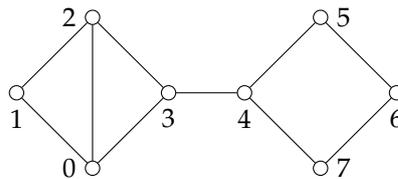
- (b) Zeichnen Sie ein Graphendiagramm des Baumes, der zu dem folgenden Prüfer-Code gehört:  $(3, 2, 1, 3, 2, 2, 1)$ .
- (c) Wie sieht ein Baum mit dem Prüfer-Code  $(a, b, a, b, a, b, a)$  mit  $a, b \in V$  aus?
- A16. **Hausaufgabe, bitte vor Beginn der 4. Übung unter Angabe von Name, Matrikelnummer und Seminargruppe abgeben.**

Erzeugen Sie die Folge  $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8)$ , wobei für  $i \leq 7$  der Eintrag  $a_i$  der  $i$ -ten Ziffer Ihrer Matrikelnummer entspricht, und wobei  $a_8 = 0$  ist.

Sei  $G = (V, E)$  der Baum mit der Knotenmenge  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ , der durch diesen Prüfer-Code gegeben ist.

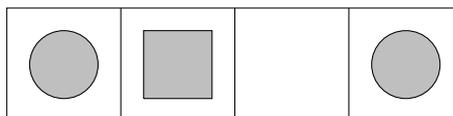
- Bestimmen Sie unmittelbar aus dem Prüfer-Code, welche Knoten Blätter des Baumes sind.
- Zeichnen Sie ein Graphendiagramm von  $G$ .

H17. Gegeben sei der folgende Graph  $G$ .



- Bestimmen Sie die Anzahl der Spannbäume von  $G$ .
  - Bestimmen Sie zu zwei verschiedenen Spannbäumen den jeweiligen Prüfer-Code. Verifizieren Sie Ihre Lösung, indem Sie aus dem erhaltenen Prüfer-Code wieder den ursprünglichen Baum konstruieren.
- H18. Wir betrachten das folgende Spiel. Das Spielfeld besteht aus vier nebeneinanderliegenden Quadraten, und es gibt drei Spielsteine: ein Quadrat, und zwei Kreise.
- Es gibt zwei mögliche Spielzüge:
- ein Spielstein wird auf ein benachbartes, freies Spielfeld geschoben;
  - ein Spielstein wird über einen benachbarten Spielstein auf ein freies Feld gesetzt.
- Für einen Spielzug vom Typ (i) erhält man einen Punkt, für einen Spielzug vom Typ (ii) erhält man zwei Punkte.

- Wie viele Spielzüge sind möglich?
- Betrachten wir die folgende Startsituation:



Das Erreichen welcher Spielsituationen bringt die meisten Punkte bei Verwendung der wenigsten Züge?

- Ist es möglich so zu ziehen, dass alle möglichen Spielsituationen genau einmal durchlaufen werden, und dass man am Ende wieder die Ausgangssituation erreicht?

Hinweis: Modellieren Sie das Spiel als Graphen, dessen Knoten die Spielsituationen sind, und dessen Kanten die möglichen Spielzüge sind. Dabei erhalten die Kanten eine Bewertung entsprechend der Punktzahl für den jeweiligen Spielzug.