TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fakultät Mathematik und Naturwissenschaften, Fachrichtung Mathematik, Institut für Algebra

Prof. Ulrike Baumann Henri Mühle Wintersemester 2017/18

5. Übungsblatt zur Vorlesung "Algebra für Informationssystemtechniker"

Teilbarkeit, Euklidischer Algorithmus

Ü25. (a) Berechnen Sie für die folgenden natürlichen Zahlen n die Anzahl der Teiler, und zeichnen Sie die entsprechenden Teilerdiagramme.

$$\text{(i) } n = 30, \quad \text{(ii) } n = 100, \quad \text{(iii) } n = 660.$$

Hinweis: Das *Teilerdiagramm* einer natürlichen Zahl n ist das Ordnungsdiagramm der Teilerrelation auf der Menge aller Teiler von n. Dabei soll ein Teiler d von n kleiner gleich einem anderen Teiler e von n sein, wenn d selbst ein Teiler von e ist.

(b) Zeigen Sie, dass $f(n) = n^5 - 5n^3 + 4n$ für jede natürliche Zahl n durch 120 teilbar ist.

Hinweis: Zerlegen Sie dazu $f(n)$ zunächst in geeignete Faktoren.

Ü26. (a) Berechnen Sie zu den angegebenen Paaren (x, y) den größten gemeinsamen Teiler und stellen Sie diesen als Linearkombination $\mathrm{ggT}(x, y) = ax + by$ mit $a, b \in \mathbb{Z}$ dar. Verifizieren Sie Ihre Ergebnisse.

$$\text{(i) } x = 135, y = 24, \quad \text{(ii) } x = 34, y = 21, \quad \text{(iii) } x = 127, y = 94.$$

(b) Berechnen Sie $\mathrm{ggT}\big(\mathrm{ggT}(150, 105), 56\big) = 150a + 105b + 56c$ mit $a, b, c \in \mathbb{Z}$.

Ü27. (a) Zeigen Sie, dass es unendlich viele Primzahlen der Form $4k + 3$ gibt.

(b) Sei p eine Primzahl, und sei $a \geqslant 1$ eine natürliche Zahl. Zeigen Sie, dass für die Eulersche Phi-Funktion gilt:

$$\varphi(p^a) = p^a \left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

A28. **Hausaufgabe, bitte vor Beginn der 6. Übung unter Angabe von Name, Matrikelnummer und Seminargruppe abgeben.**
Für $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ bezeichne a_i die i-te Ziffer Ihrer Matrikelnummer. Erzeugen Sie zunächst die Zahlen $x = 100a_1 + 10a_2 + a_3$ und $y = 100a_5 + 10a_6 + a_7$.

(a) Bestimmen Sie die Primfaktorzerlegung von x und y, und zeichnen Sie jeweils ein Teilerdiagramm.

(b) Berechnen Sie den größten gemeinsamen Teiler von x und y mittels des Euklidischen Algorithmus'. Geben Sie eine Darstellung $\mathrm{ggT}(x,y) = ax + by$ mit $a, b \in \mathbb{Z}$ an.

H29. Finden Sie die kleinste positive natürliche Zahl n mit der folgenden Eigenschaft:

> Für alle Primzahlen p gilt, dass p genau dann ein Teiler von n ist, wenn auch $p-1$ ein Teiler von n ist.

Hinweis: Eine solche Zahl gibt es wirklich. Allerdings ist das Finden der Lösung durch Ausprobieren recht aufwändig. Wenn Sie (bei 1 beginnend) pro Zahl eine Minute zum Überprüfen brauchen, werden Sie die Lösung erst nach etwas mehr als einem Tag finden.

H30. Die Folge der *Fibonacci*-Zahlen (f_n) ist wie folgt rekursiv definiert:

$$f_1 = f_2 = 1 \quad \text{und} \quad f_{n+2} = f_{n+1} + f_n \text{ für alle } n \geqslant 2.$$

(a) Berechnen Sie die ersten zehn Elemente dieser Folge.

(b) Stellen Sie den größten gemeinsamen Teiler von f_9 und f_{10}, sowie von f_{10} und f_{11} als Linearkombination von f_9 und f_{10}, bzw. von f_{10} und f_{11} dar.

(c) Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass zwei aufeinanderfolgende Fibonacci-Zahlen f_n und f_{n+1} teilerfremd sind, und für alle $n > 2$ insbesondere die Beziehung

$$(-1)^n = f_{n-1}f_n - f_{n-2}f_{n+1}$$

gilt.