Algebra für Informationssystemtechniker

Prof. Dr. Ulrike Baumann

Fachrichtung Mathematik

Institut für Algebra

www.math.tu-dresden.de/$\sim$baumann

Ulrike.Baumann@tu-dresden.de

1.11.2017

2. Vorlesung

Mengen und Graphen (2)

- Graphen und Graphendiagramme
- Handschlaglemma
- Spezielle Graphen
- Untergraphen

- Beispiele zur Modellierung mit Graphen

Multigraph

- Ein Multigraph $G = (V, E, f)$ besteht aus einer Menge V von Elementen erster Art, einer Menge E von Elementen zweiter Art und einer auf E erklärten Funktion f, die jedem $e \in E$ eindeutig ein geordnetes oder ungeordnetes Paar zweier verschiedener Elemente $x, y \in V$ oder eine einelementige Menge zuordnet.

  f wird Inzidenzfunktion genannt.

  Die Elemente von V heißen Knoten.

  Die Elemente von E heißen (gerichtete oder ungerichtete) Kanten.

- Multigraphen lassen sich durch Diagramme veranschaulichen.

Endliche schlichte ungerichtete Graphen

- Ein endlicher schlichter ungerichteter Graph $G = (V, E)$ ist ein Paar aus einer Menge V, die endlich und nichtleer ist, und einer Menge E, die zweielementige Teilmengen von V enthält.

  V ist die Knotenmenge von G; die Elemente von V heißen Knoten.

  E ist die Kantenmenge von G; die Elemente von E heißen Kanten.

- Im Weiteren werden nur endliche schlichte ungerichtete Graphen betrachtet und kurz Graphen genannt.

- Es gibt genau
$$2^{\binom{n}{2}}$$
  Graphen mit der Knotenmenge $V = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Handschlaglemma

- Sei $G = (V, E)$ ein Graph und $v \in V$. Dann wird $d_G(v) := |\{e \in E \mid v \in e\}|$ der Grad von v in G genannt.

- Lemma:

  Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Dann gilt:

  $$\sum_{v \in V} d_G(v) = 2|E|$$

- Dieses Lemma wird Handschlaglemma genannt und durch doppeltes Abzählen bewiesen.

Spezielle Graphen (1)

- Haben alle Knoten eines Graphen G den Grad r, dann wird G ein r-regulärer Graph (regulärer Graph vom Grad r) genannt.

- Sei $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, $|V| = n$,
  $E := \{\{x, y\} \mid x, y \in V,\ x \neq y\}$.
  $K_n := (V, E)$ heißt vollständiger Graph.

- Sei $V := \{v_0, v_1, \dots, v_n\}$, $|V| = n + 1$,
  $E := \{\{v_0, v_1\}, \{v_1, v_2\}, \dots, \{v_{n-1}, v_n\}\}$.
  $P_n := (V, E)$ heißt Weg der Länge n mit den Endpunkten v_0 und v_n.

- Sei $V := \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, $|V| = n \geq 3$,
  $E := \{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \dots, \{v_{n-1}, v_n\}, \{v_n, v_1\}\}$.
  $C_n := (V, E)$ heißt Kreis der Länge n.

Spezielle Graphen (2)

- Ein Graph $G = (V, E)$ heißt bipartiter Graph $G(A, B)$, wenn es zwei nichtleere Teilmengen A, B von V mit $V = A \cup B$ und $A \cap B = \emptyset$ so gibt, dass für jedes $e \in E$ gilt:

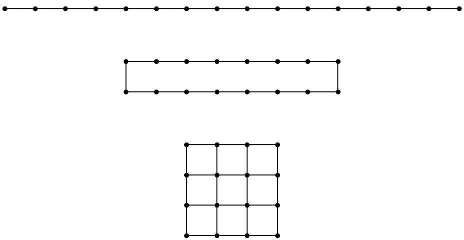
$$e \cap A \neq \emptyset \text{ und } \ e \cap B \neq \emptyset$$

- Sei $V := V_1 \cup V_2$,
  $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, $V_1 \neq \emptyset$, $V_2 \neq \emptyset$, $|V_1| = n_1$, $|V_2| = n_2$,
  $E := \{\{x, y\} \mid x \in V_1, y \in V_2\}$.

  $K_{n_1,n_2} := (V, E)$ heißt vollständig bipartiter Graph.

Prozessoren $p_1, p_2, \ldots, p_n$,
die untereinander kommunizieren und Teilprobleme bearbeiten können

Beispiel: $n = 16$



Dabei sind jedoch die Abstände zwischen den Prozessoren zu groß und das Einfügen aller Kanten ist zu teuer.
Zur Modellierung des Netzwerkes ist ein Hypercube Q_4 besser geeignet.

Spezielle Graphen (3)

- Hypercube Q_n ($n \geq 2$) (n-dimensionaler Würfel)
  - $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ mit $a_i \in \{0, 1\}$ für $i = 1, 2, \ldots, n$ sind die Knoten von Q_n
  - Zwei Knoten werden in Q_n genau dann durch eine Kante verbunden, wenn sie sich in genau einer Koordinate unterscheiden.
- Der n-dimensionale Würfel Q_n ist ein bipartiter Graph.

Untergraphen

- Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Ein Graph $G' := (V', E')$ mit $V' \subseteq V$ und $E' \subseteq E$ heißt Untergraph von G.
- Ein Graph G heißt zusammenhängend, wenn es zu je zwei Knoten u, v von G einen Weg mit den Endpunkten u und v in G gibt.
- Ein zusammenhängender Graph, der keinen Kreis als Untergraph enthält, heißt Baum.