Algebra für Informationssystemtechniker

Prof. Dr. Ulrike Baumann

Fachrichtung Mathematik

Institut für Algebra

www.math.tu-dresden.de/∼baumann

Ulrike.Baumann@tu-dresden.de

15.11.2017

Mengen und Graphen (3)

- Eigenschaften von Bäumen
- Codierung von Bäumen mit dem Prüfer-Code
- Spannbäume in Graphen

Bäume und Spannbäume

- Ein zusammenhängender kreisloser Graph ist ein Baum.
  Ein kreisloser Graph ist ein Wald.
- Jeder Graph, der nicht zusammenhängend ist, zerfällt in Komponenten (das sind maximale zusammenhängende Untergraphen).
- Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Ist ein Untergraph $T' = (V, E')$ von G ein Baum, dann nennt man ihn einen Spannbaum von G.
- Jeder zusammenhängende Graph G enthält einen Spannbaum als Untergraph.

Eigenschaften von Bäumen

(1) Jeder Baum mit Knotenanzahl $n > 1$ hat mindestens zwei Knoten vom Grad 1 (Blätter).

(2) Jeder Baum mit Knotenanzahl n hat Kantenanzahl $n - 1$.

(3) Jeder kreislose Graph mit Knotenanzahl n und Kantenanzahl $n - 1$ ist ein Baum.

(4) Jeder zusammenhängende Graph mit Knotenanzahl n und Kantenanzahl $n - 1$ ist ein Baum.

(5) Sind u, v zwei Knoten in einem Baum T, dann gibt es in T genau einen Weg mit den Endpunkten u und v.

Codierung von Bäumen mit dem Prüfer-Code

Eine bijektive Abbildung von der Menge aller Bäume auf der Knotenmenge $V = \{1, 2, \ldots, n\}$ ($n \geq 2$) auf die Menge aller Folgen $(a_1, a_2, \ldots, a_{n-2})$ mit $a_i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ ($i = 1, 2, \ldots, n-2$).

(1) Baum $T = (V, E) \mapsto (a_1, a_2, \ldots, a_{n-2})$

- Für $n = 2$ wird dem Baum das Nulltupel zugeordnet.
- Für $n \geq 2$ suche unter allen Knoten vom Grad 1 den kleinsten Knoten v. Ist $\{v, w\} \in E$, dann setze $a_1 := w$.
- Sei $(a_2, a_3, \ldots, a_{n-2})$ der Prüfer-Code des Baumes $T - v := (V \setminus \{v\}), E \setminus \{\{v, w\}\})$.
  Dann ist $(a_1, a_2, \ldots, a_{n-2})$ der Prüfer-Code des Baumes T.

(2) $(a_1, a_2, \ldots, a_{n-2}) \mapsto$ Baum $T = (V, E)$

- Suche das kleinste $b_1 \in \{1, 2, \ldots, n\}$, das nicht im $(n-2)$-Tupel $(a_1, a_2, \ldots, a_{n-2})$ auftritt. Es bestimmt die Kante $\{b_1, a_1\}$.
- Suche das kleinste $b_2 \in \{1, 2, \ldots, n\} \setminus \{b_1\}$, das nicht im $(n-3)$-Tupel $(a_2, a_3, \ldots, a_{n-1})$ auftritt.
  Es bestimmt die Kante $\{b_2, a_2\}$. Usw.
- Die Menge $\{1, 2, \ldots, n\} \setminus \{b_1, b_2, \ldots, b_{n-2}\}$ enthält zwei Knoten, die durch eine Kante zu verbinden sind.

Prüfer-Code (Ergänzung)

Für jede Kante $\{b_i, a_i\}$ $(i = 1, \ldots, n-2)$ wird b_i Anfangspunkt und a_i Endpunkt genannt; entsprechend wird in $\{1, \ldots, n\} \setminus \{b_1, \ldots, b_{n-2}\} = \{b_{n-1}, b_n\}$ der Knoten b_{n-1} Anfangspunkt und b_n Endpunkt genannt.

Nach Konstruktion gilt:

- Jeder Knoten ist Anfangspunkt höchstens einer Kante.
- Kein Endpunkt einer Kante ist Anfangspunkt einer früher konstruierten Kante.

Annahme: Der konstruierte Graph (n Knoten, $n-1$ Kanten) ist kein Baum. Dann würde es einen Kreis geben, der durch Hinzufügen einer Kante e entstanden ist. Auf diesem Kreis müsste es einen Knoten geben, der Anfangspunkt der beiden mit ihm inzidierenden Kreiskanten ist.
Das ist ein Widerspruch und die Annahme ist daher falsch.

Also ist der in (2) konstruierte Graph tatsächlich ein Baum.

Anzahl von Bäumen bzw. Spannbäumen

- Es gibt genau n^{n-2} Bäume $T = (V, E)$ mit $V = \{1, 2, \dots, n\}$.

- Der vollständige Graph K_n hat genau n^{n-2} Spannbäume.

Zur Information:

- Ist G ein ungerichteter Multigraph und $e = \{u, v\}$ $(u \neq v)$ eine Kante von G, so gilt für die Anzahl $\tau(G)$ der Spannbäume von G:

$$\tau(G) = \tau(G - e) + \tau(G/e)$$

  Dabei bezeichnet $G - e$ den durch Löschen der Kante e und G/e den durch Kontraktion[1] der Kante e aus G enstandenen Multigraphen.

[1] Identifizieren der beiden Endpunkte