

Algebra für Informationssystemtechniker

Prof. Dr. Ulrike Baumann

Fachrichtung Mathematik

Institut für Algebra

www.math.tu-dresden.de/~baumann

Ulrike.Baumann@tu-dresden.de

29.11.2017

Mengen und Graphen (4)

- planare Graphen und ebene Graphendiagramme

EULERSche Polyederformel

- Eigenschaften planarer Graphen
- Isomorphie von Graphen

Planarer Graph, EULERSche Polyederformel

- Ein Graphendiagramm, in dem sich keine Kanten kreuzen, heißt eben. Ein Graph heißt planar, wenn er ein ebenes Graphendiagramm besitzt.
- Satz (Polyederformel):
Hat ein zusammenhängender Graph mit n Knoten und m Kanten ein ebenes Diagramm mit f Flächen, dann gilt:

$$n + f = m + 2$$

Eigenschaften planarer Graphen

- Der vollständige Graph K_5 und der vollständig bipartite Graph $K_{3,3}$ sind nicht planar.
- Ein Graph ist genau dann planar, wenn er keine Unterteilung von K_5 und keine Unterteilung von $K_{3,3}$ als Untergraph enthält.
- Hat ein zusammenhängender Graph G mit Kantenanzahl m ein ebenes Diagramm mit f Flächen und ist C_k ein Kreis in G mit kleinstmöglicher Kantenanzahl, dann gilt:

$$k \cdot f \leq 2m$$

- Jeder planare Graph enthält einen Knoten vom Grad ≤ 5 .
- Man kann effizient testen, ob ein gegebener Graph planar ist.

Isomorphie von Graphen

- Ein Graph $G_1 = (V_1, E_1)$ heißt zu einem Graphen $G_2 = (V_2, E_2)$ isomorph, wenn es eine bijektive Abbildung $f : V_1 \rightarrow V_2$ mit

$$\{x, y\} \in E_1 \iff \{f(x), f(y)\} \in E_2 \text{ für alle } \{x, y\} \in E_1$$

gibt.

Bezeichnung: $G_1 \cong G_2$

- Isomorphieproblem (für Graphen):
Man entscheide, ob für gegebene Graphen G_1, G_2 gilt:

$$G_1 \cong G_2$$

- Die Isomorphie von Graphen ist eine Äquivalenzrelation:

$$G_1 \cong G_1 \quad (\cong \text{ ist reflexiv})$$

$$G_1 \cong G_2 \Rightarrow G_2 \cong G_1 \quad (\cong \text{ ist symmetrisch})$$

$$G_1 \cong G_2 \text{ und } G_2 \cong G_3 \Rightarrow G_1 \cong G_3 \quad (\cong \text{ ist transitiv})$$

Man spricht von zueinander isomorphen Graphen.

Isomorphieklassen von Graphen

- Durch unbeschriftete Graphendiagramme wird die Isomorphieklasse des Graphen angegeben.
(Man sagt auch, dass durch unbeschriftete Graphendiagramme die Graphen bis auf Isomorphie gegeben sind.)

- Beispiel:

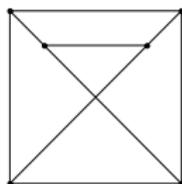
Mit $I(n)$ wird die Anzahl der Isomorphieklassen für Bäume mit der Knotenanzahl n bezeichnet.

n		1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
$I(n)$		1	1	1	2	3	6	11	23	47	...

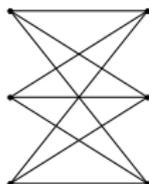
Beispiel

G_1 , G_2 und G_3 liegen in derselben Isomorphieklasse.

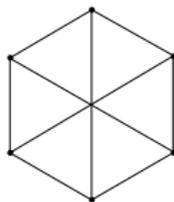
G_4 ist nicht in der Isomorphieklasse von G_1 (bzw. G_2 bzw. G_3)
enthalten.



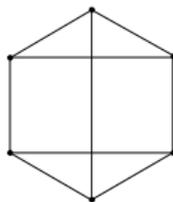
G_1



G_2



G_3



G_4