TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Bereich Mathematik und Naturwissenschaften, Fakultät Mathematik, Institut für Algebra

Dr. Henri Mühle

Sommersemester 2019

1. Übungsblatt zur Vorlesung "Coxeter-Catalan Kombinatorik"

Coxeter-Systeme

Sei (W,S) ein Coxeter-System.

Ü1. Der zu (W,S) gehörige Coxeter-Graph ist $s_1 \overline{\qquad} s_2 \overset{x}{\overline{\quad}} s_3$, und es soll die Relation $s_2s_3s_2s_3s_1s_3s_1s_2s_1s_2s_3s_1s_3s_2s_3s_1s_2s_1s_3s_2s_1s_2s_1s_3s_2s_3 = e$ gelten. Welchen Wert hat x?

Ü2. Zeigen Sie, dass für ein Coxeter-System (W',S') mit $W \cong W'$ im allgemeinen nicht $\#S = \#S'$ gilt.

<u>Hinweis:</u> Betrachten Sie die Diedergruppe der Ordnung 12.

Ü3. Sei $\varepsilon(s) = -1$ für alle $s \in S$.

(a) Zeigen Sie, dass dadurch ein Gruppenhomomorphismus $\varepsilon\colon W \to \{-1,1\}$ definiert ist.

(b) Welche Elemente liegen im Kern von ε?

(c) Beschreiben Sie den Kern von ε im Fall $W = A_n$ als konkrete Permutationsgruppe.

Ü4. Die *alternierende Untergruppe* von W ist

$$\mathfrak{A}(W) \overset{\text{def}}{=} \{w \in W \mid \ell_S(w) \equiv 0 \pmod 2\}.$$

Seien $w_1 = (1\,2)(3\,4)$, $w_2 = (1\,2)(4\,5)$, $w_3 = (1\,4)(2\,3)$ Elemente von $\mathfrak{S}_5$.

(a) Berechnen Sie die Ordnungen der Produkte w_iw_j für $i,j \in [3]$.

(b) Zeigen Sie, dass es einen surjektiven Gruppenhomomorphismus $f\colon H_3 \to \mathfrak{A}(\mathfrak{S}_5)$ gibt.

(c) Zeigen Sie, dass $\mathfrak{A}(H_5) \cong \mathfrak{A}(\mathfrak{S}_5)$ gilt.

Ü5. Sei $w \in W$ mit $w = s_1s_2\cdots s_k$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Sei Wenn $\ell_S(w) < k$, dann ist $w = s_1s_2\cdots\hat{s}_i\cdots\hat{s}_j\cdots s_k$ für $1 \leq i < j \leq k$.

(b) Sei $t_i = s_1s_2\cdots s_i\cdots s_2s_1$. Wenn $t_i \neq t_j$ für alle $1 \leq i < j \leq k$, dann ist $\ell_S(w) = k$.

Ü6. Seien $I,J \subseteq S$ derart, dass W_I, W_J endlich sind. Es bezeichnen $w_\circ(I)$ und $w_\circ(J)$ die längsten Elemente von W_I bzw. W_J. Zeigen Sie, dass genau dann $I \subseteq J$ gilt, wenn $w_\circ(I) \leq_S w_\circ(J)$ ist.