TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fakultät Mathematik und Naturwissenschaften, Fachrichtung Mathematik, Institut für Algebra

Henri Mühle Wintersemester 2017/18

2. Übungsblatt zur Vorlesung "Geordnete Mengen in Hyperebenenarrangements"

Grundlagen zu Hyperebenenarrangements

Im folgenden sei $\mathbf{V} = \mathbb{R}^n$, und es bezeichne wie in der Vorlesung $\mathrm{Hyp}(\mathbf{V})$ die Klasse aller Hyperebenenarrangements in $\mathbf{V}$. Sei $\mathcal{A} \in \mathrm{Hyp}(\mathbf{V})$.

Ü9. Zeigen Sie, dass $\chi_{\mathcal{A}}(t) = t^{\dim(\mathcal{A})-\mathrm{rk}(\mathcal{A})}\chi_{\mathrm{ess}(\mathcal{A})}(t)$ gilt.

Ü10. Angenommen $\chi_{\mathcal{A}}(t)$ ist durch t^k, aber nicht durch t^{k+1} teilbar. Zeigen Sie, dass dann $\mathrm{rk}(\mathcal{A}) = n - k$ gilt.

Ü11. Seien $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \in \mathrm{Hyp}(\mathbf{V})$ mit $\mathrm{N}(\mathcal{A}_1) \cap \mathrm{N}(\mathcal{A}_2) = \{\vec{0}\}$. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\chi_{\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2}(t) = t^{-n}\chi_{\mathcal{A}_1}(t)\chi_{\mathcal{A}_2}(t).$$

Ü12. Es bezeichne $\mathrm{cone}(\mathcal{A})$ den Kegel über $\mathcal{A}$. Zeigen Sie, dass $\chi_{\mathrm{cone}(\mathcal{A})}(t) = (t-1)\chi_{\mathcal{A}}(t)$ gilt.

Hinweis: Benutzen Sie den Satz von Whitney.

Ü13. Zeigen Sie, dass die Kammern von $\mathcal{A}$ offene, konvexe Teilmengen von $\mathbf{V}$ sind.

Ü14. Zeigen Sie, dass es in zentralen Arrangements keine beschränkten Kammern gibt.

Ü15. Sei $n = \dim(\mathcal{A})$. Dann ist $\mathcal{A}$ in ALLGEMEINER LAGE, wenn für alle $H_1, H_2, \ldots, H_k \in \mathcal{A}$ gilt:

$$\dim(H_1 \cap H_2 \cap \cdots \cap H_k) = \begin{cases} n-k, & \text{wenn } k \leqslant n, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Sei weiter $\#\mathcal{A} = m$. Bestimmen Sie das charakteristische Polynom von $\mathcal{A}$, sowie die Anzahl der (beschränkten) Kammern von $\mathcal{A}$.