TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Bereich Mathematik und Naturwissenschaften, Fakultät Mathematik, Institut für Algebra

Jun.-Prof. Friedrich Martin Schneider, Dr. Henri Mühle. Wintersemester 2018/19

10. Übungsblatt zur Vorlesung "Diskrete Strukturen für Informatiker"

Gruppen

V. Vervollständigen Sie die nachstehende Verknüpfungstafel, sodass die Menge $\{a, b, c, d\}$ mit der durch die Tafel gegebenen Operation eine Gruppe bildet. Wie viele Möglichkeiten gibt es?

$\circ$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b			
c	c		a	
d	d			

Ü55. (a) Berechnen Sie $(24 \cdot 12)^{2018} \pmod{101}$.

(b) Berechnen Sie $13^{469} \pmod{11}$ und $7^{967} \pmod{18}$ ohne Square-and-Multiply.

(c) Zeigen Sie, dass für zwei beliebige Primzahlen p, q, mit $p \neq q$, und für jede Zahl $a \in \mathbb{Z}$, die nicht durch p oder q teilbar ist, gilt:

$$a^{(p-1)(q-1)} \equiv 1 \pmod{p \cdot q}.$$

Ü56. (a) Es sei $(\mathbb{Z}_{14}^*, \cdot)$ die Gruppe der Einheiten des Restklassenrings $(\mathbb{Z}_{14}, +, \cdot)$.

(i) Stellen Sie die Verknüpfungstafel für $(\mathbb{Z}_{14}^*, \cdot)$ auf.

(ii) Für welche $k \in \mathbb{N}$ kann $(\mathbb{Z}_{14}^*, \cdot)$ Untergruppen der Ordnung k besitzen?

(iii) Finden Sie alle Untergruppen von $(\mathbb{Z}_{14}^*, \cdot)$ und geben Sie deren Ordnung an.

(iv) Bestimmen Sie die Menge der Linksnebenklassen $\{k \cdot U \mid k \in \mathbb{Z}_{14}^*\}$ für eine nichttriviale Untergruppe U von $(\mathbb{Z}_{14}^*, \cdot)$.

(b) Es sei $(G, \circ)$ eine Gruppe. Zeigen Sie, dass für jedes $g \in G$ und jede Teilmenge $U \subseteq G$ die zugeordnete Abbildung $f\colon U \to g \circ U$ mit $f(u) = g \circ u$ bijektiv ist.

Ü57. Für $n > 2$ bezeichne $\mathfrak{D}_n$ die *Diedergruppe* der Ordnung $2n$. Dies ist die Symmetriegruppe eines regulären n-Ecks in der Ebene bzgl. der Hintereinanderausführung. Sie besteht also aus allen Spiegelungen und Drehungen, die das n-Eck auf sich selbst abbilden.

(a) Schreiben Sie die Gruppen $\mathfrak{D}_n$ für $n \in \{3,4,5\}$ elementweise auf.

(b) Stellen Sie die Verknüpfungstafel für $\mathfrak{D}_4$ auf.

(c) Bestimmen Sie alle Untergruppen von $\mathfrak{D}_4$.

(d) Es sei p eine Primzahl, und sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 0$. Für welche $k \in \mathbb{N}$ kann $\mathfrak{D}_{p^n}$ Untergruppen der Ordnung k besitzen?

Hinweis: Zeichnen Sie zunächst ein reguläres n-Eck, und beschriften Sie die Eckpunkte von 1 bis n im Uhrzeigersinn. Spiegelungen und Drehungen sind dann (spezielle) bijektive Abbildungen der Form $f\colon \{1,2,\ldots,n\} \to \{1,2,\ldots,n\}$, und lassen sich einfach mit Hilfe des Tupels $\big(f(1), f(2), \ldots, f(n)\big)$ der Bildwerte darstellen.

A58. **Hausaufgabe, bitte vor Beginn der 11. Übung (oder im Lernraum) unter Angabe von Name, Matrikelnummer, Übungsgruppe und Übungsleiter abgeben.**
Es sei $(\mathbb{Z}_{20}^*, \cdot)$ die Gruppe der Einheiten des Restklassenrings $(\mathbb{Z}_{20}, +, \cdot)$.

(a) Geben Sie alle Elemente von $\mathbb{Z}_{20}^*$ an, und stellen Sie die Verknüpfungstafel von $(\mathbb{Z}_{20}^*, \cdot)$ auf.

(b) Bestimmen Sie alle Untergruppen der Ordnung 2 von $(\mathbb{Z}_{20}^*, \cdot)$.

(c) Bestimmen Sie die Menge der Linksnebenklassen $\big\{k \cdot U \mid k \in \mathbb{Z}_{20}^*\big\}$ für $U = \{1,3,7,9\}$.

(d) Berechnen Sie alle $x \in \mathbb{Z}_{20}$, die die Kongruenz $9887^{8899}x \equiv 11 \pmod{20}$ erfüllen.

H59. Auf einer Insel leben r rote, g grüne und b blaue Chamäleons. Treffen sich zwei verschiedenfarbige Chamäleons, ändern sie beide ihre Farbe in die dritte Farbe. Begegnen sich zwei gleichfarbige Chamäleons, ändern sie ihre Farbe nicht.

(a) Sei $r = 1$, $g = 2$, $b = 4$. Gibt es eine Folge von (paarweisen) Begegnungen, sodass am Ende alle Chamäleons die gleiche Farbe besitzen?

(b) Sei $r = 13$, $g = 15$, $b = 17$. Gibt es eine Folge von (paarweisen) Begegnungen, sodass am Ende alle Chamäleons die gleiche Farbe besitzen?

Hinweis: Modellieren Sie die Farben als Elemente des Restklassenrings $(\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$ und überlegen Sie, was bei einer Begegnung passiert.

H60. Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe mit neutralem Element e, und sei $A \subseteq G$. Zeigen Sie, dass $\langle A \rangle$ die bzgl. Inklusion kleinste Untergruppe von G ist, die A enthält, und dass gilt

$$\langle A \rangle = \big\{a_1 \circ a_2 \circ \cdots \circ a_k \mid k \in \mathbb{N},\ a_i \in A \cup A^{-1} \cup \{e\}\big\}.$$