TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DRESDEN

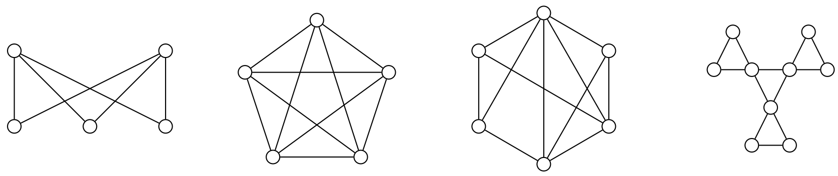
Bereich Mathematik und Naturwissenschaften, Fakultät Mathematik, Institut für Algebra

Jun.-Prof. Friedrich Martin Schneider, Dr. Henri Mühle. Wintersemester 2018/19

13. Übungsblatt zur Vorlesung "Diskrete Strukturen für Informatiker"

Bäume, Graphenhomomorphismen

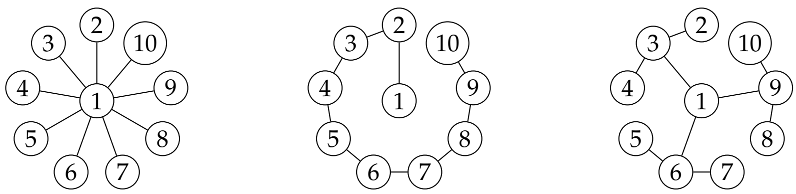
$\boxed{\text{V.}}$ In welchen der folgenden Graphen gibt es offene bzw. geschlossene Eulerwege?



Ü73. Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$. Sei $T = \big([n], E\big)$ ein Baum. Der folgende Algorithmus konstruiert den *Prüfer-Code* $p(T)$ des Baumes T.

> Initial wird der Baum $T_0 = (V_0, E_0)$ mit $V_0 = [n]$ und $E_0 = E$ betrachtet. Im i-ten Schritt bezeichne v das kleinste Blatt von T_{i-1}, und w den eindeutigen Nachbarn von v. Man setzt nun $a_i = w$, sowie $T_i = T_{i-1} \setminus \{v\}$ und $E_i = E_{i-1} \setminus \big\{\{v, w\}\big\}$. Der Algorithmus bricht nach $n-2$ Schritten ab und gibt $p(T) = (a_1, a_2, \ldots, a_{n-2})$ aus. (Insbesondere ist T_{n-2} ein Baum mit zwei Knoten.)

(a) Bestimmen Sie für jeden der nachstehenden Bäume den zugehörigen Prüfer-Code.



(b) Die Abbildung $T \mapsto p(T)$ ist offenbar injektiv. Ist sie auch surjektiv?

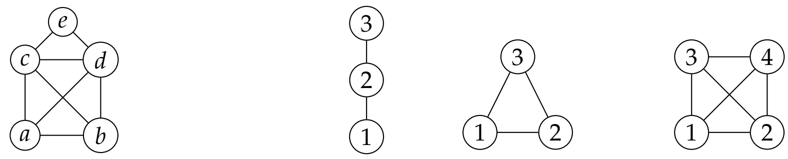
(c) Konstruieren Sie den Baum T, dessen Prüfer-Code $p(T) = (3, 2, 6, 3, 4, 1)$ ist.

(d) Schlussfolgern Sie aus (b) die Anzahl der Bäume mit n Knoten.

Ü74. Seien $G_1 = (V_1, E_1)$ und $G_2 = (V_2, E_2)$ zwei Graphen und $\varphi\colon V_1 \to V_2$ ein Graphenhomomorphismus.

(a) Zeigen Sie, dass jeder Kreis der Länge drei in G_1 unter φ auf einen Kreis der Länge drei in G_2 abgebildet wird.

(b) Es sei G der Graph auf der linken Seite, und es seien G_1, G_2, G_3 die drei Graphen auf der rechten Seite.



Nutzen Sie das Ergebnis aus (a) um zu beurteilen für welche $i \in \{1, 2, 3\}$ es einen Homomorphismus von G nach G_i geben kann. Geben Sie, wenn möglich, einen solchen Homomorphismus explizit an.

Ü75. Sei $G = (V, E)$ ein Graph und seien $Z_1, Z_2, \ldots, Z_s$ die Zusammenhangskomponenten von G. Zeigen Sie, dass G genau dann bipartit ist, wenn für alle $i \in [s]$ der von Z_i induzierte Teilgraph von G bipartit ist.

H76. Geben Sie alle Isomorphieklassen der unbeschrifteten Bäume mit genau sechs Knoten durch jeweils ein zugehöriges Graphendiagramm an. Ermitteln Sie die Kardinalität jeder Isomorphieklasse. Überprüfen Sie Ihr Ergebnis, indem Sie die Anzahl aller Bäume mit sechs Knoten auf einem anderen Weg bestimmen.

H77. Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Für $v, w \in V$ ist der *Abstand* von v nach w definiert als

$$\operatorname{dist}_G(v, w) = \min\big\{n \in \mathbb{N} \mid \exists\ (v_0, v_1, \ldots, v_n) \text{ Weg in } G \text{ mit } v_0 = v \text{ und } v_n = w\big\}.$$

Sei nun $T = (V, E)$ ein Baum.

(a) Zeigen Sie, dass es für alle $v, w \in V$ genau einen Weg der Länge $\operatorname{dist}_T(v, w)$ von v nach w gibt.

(b) Sei $v_o \in V$ ein fest gewählter Knoten. Zeigen Sie, dass die Relation

$$R_T = \big\{(v, w) \mid w \text{ liegt auf dem eindeutigen kürzesten Weg von } v \text{ nach } v_o\big\}$$

eine Ordnungsrelation ist; die *Baumordnung* von T.

H78. Ein *Spannbaum* eines Graphen $G = (V, E)$ ist ein Baum $T = (V, E')$ mit $E' \subseteq E$.

(a) Zeichnen Sie alle Spannbäume des vollständigen, bipartiten Graphen $K_{m,n}$ für $m = n = 2$ und $m = 3, n = 2$.

(b) Zeichnen Sie alle Spannbäume des vollständigen Graphen K_n für $1 \leq n \leq 4$. Wie viele Spannbäume besitzt K_n für beliebiges n?

(c) Es sei G der Graph, der aus dem K_n durch das Löschen einer Kante hervorgeht. Wie viele Spannbäume hat G?

Hinweis: Bestimmen Sie in (c) zunächst die Anzahl der Spannbäume des K_n, die eine festgelegte Kante enthalten.