TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

**Bereich Mathematik und Naturwissenschaften**, Fakultät Mathematik, Institut für Algebra

Jun.-Prof. Friedrich Martin Schneider, Dr. Henri Mühle. Wintersemester 2018/19

# 14. Übungsblatt zur Vorlesung "Diskrete Strukturen für Informatiker"

## *Geordnete Mengen*

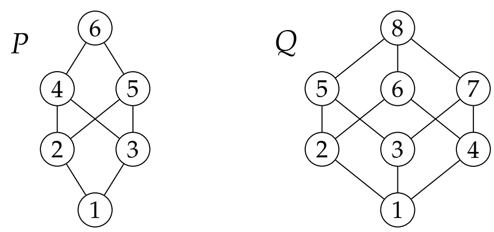
$\boxed{\text{V.}}$ Auf der Menge $M = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ wird folgende Relation betrachtet:

$$R = \big\{(x,y) \mid y > 3, x \equiv 3 \pmod{y}\big\}.$$

(a) Geben Sie $R$ als Menge konkreter Paare an.

(b) Bestimmen Sie die kleinste Ordnungsrelation $T$, die $R$ enthält, und zeichnen Sie ein Ordnungsdiagramm von $T$.

Ü79. Betrachtet werden die beiden, durch die nachstehenden Ordnungsdiagramme gegebenen, geordneten Mengen.




(a) Bestimmen Sie die Anzahl der linearen Erweiterungen von $P$, und geben Sie diese konkret an. Begründen Sie, dass $P$ die Ordnungsdimension 2 hat.

(b) Begründen Sie, dass $Q$ die Ordnungsdimension 3 hat. Ändert sich das, wenn man das Element 6 entfernt?

Ü80. Sei $M$ eine endliche Menge, und sei $R \subseteq M \times M$ eine Relation. Eine *zyklische Folge* in $R$ sind Paare $(a_1, a_2), (a_2, a_3), \ldots, (a_{k-1}, a_k), (a_k, a_1) \in R$ mit $k \geq 1$. Wenn $R$ keine zyklischen Folgen besitzt, ist $R$ *azyklisch*.

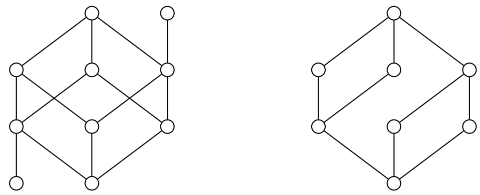
(a) Zeigen Sie, dass jede azyklische Relation antisymmetrisch und irreflexiv ist.

(b) Zeigen Sie, dass jede azyklische Relation zu einer Ordnungsrelation erweitert werden kann.

(c) Welche der beiden folgenden Relationen lassen sich zu einer Ordnungsrelation erweitern? Zeichnen Sie ggf. ein Ordnungsdiagramm.

$$R_1 = \big\{(0,1), (1,3), (2,1), (3,4), (4,0)\big\}$$
$$R_2 = \big\{(0,1), (1,2), (2,5), (4,3), (6,2)\big\}$$

Ü81. (a) Betrachtet werden die durch die nachstehenden Ordnungsdiagramme gegebenen geordneten Mengen. Finden Sie jeweils die kleinste Anzahl von Ketten, in die sich die entsprechende Grundmenge zerlegen lässt, und geben Sie eine solche Zerlegung an.



(b) Seien $r, s \in \mathbb{N}$ und sei $(M, \leq)$ eine geordnete Menge mit $|M| = rs + 1$. Zeigen Sie, dass es in $(M, \leq)$ eine Kette der Länge $r + 1$ oder eine Antikette der Länge $s + 1$ (oder beides) gibt.

(c) Sei $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_{rs+1})$ mit $r, s \in \mathbb{N}$ und $a_i \in \mathbb{R}$ für $1 \leq i \leq rs + 1$. Eine *Teilfolge* der Länge $k$ von $\mathbf{a}$ ist ein Tupel $(a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k})$ mit $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq rs + 1$.

Schlussfolgern Sie aus (b), dass es in $\mathbf{a}$ stets eine aufsteigende Teilfolge der Länge $r + 1$ oder eine absteigende Teilfolge der Länge $s + 1$ geben muss.

Hinweis: Benutzen Sie in (b) den Satz von Dilworth.

H82. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$.

(a) Zeichnen Sie die Ordnungsdiagramme aller linearen Ordnungsrelationen auf $[n]$ für $1 \leq n \leq 4$ an.

(b) Zeigen Sie, dass es genau $n!$ lineare Ordnungsrelationen auf $[n]$ gibt.

H83. Es sei $\{0,1\}^* = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \{0,1\}^i$ die Menge aller Wörter über dem Alphabet $\{0,1\}$. Für zwei Wörter $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_r)$ und $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_s)$ gelte $\mathbf{a} \leq_{\text{lex}} \mathbf{b}$ genau dann wenn es ein $i \leq \min\{r, s\}$ gibt sodass $a_j = b_j$ für alle $1 \leq j \leq i$ und entweder $i = r$ oder sowohl $i < s$ als auch $a_{i+1} < b_{i+1}$ gilt.

Die so entstehende Relation auf $\{0,1\}^*$ heißt *lexikographische Ordnung*. Zeigen Sie, dass $\leq_{\text{lex}}$ eine lineare Ordnung ist.

H84. Alle Rechtecke mit Seitenlängen $a, b \in \{1, 2, 3, 4\}$ (cm) sollen aus Platinfolie ausgeschnitten und einzeln fotografiert werden. Es wird aber nicht verlangt, dass die Rechtecke gleichzeitig vorliegen. Vielmehr ist es erlaubt, ein bereits fotografiertes Rechteck zu zerschneiden, um weitere Rechtecke zu erhalten. Wie viel Quadratzentimeter Folie braucht man dafür?

Hinweis: Modellieren Sie das Problem mithilfe einer geeigneten Ordnungsrelation auf der Menge all solcher Rechtecke.