2. Übungsblatt zur Vorlesung "Diskrete Strukturen für Informatiker"

Mengen, Relationen

$\boxed{\text{V.}}$ Zeigen Sie, dass für alle Teilmengen A, B einer festen Menge M gilt:

- $A \cap \overline{B} = A \setminus B$;
- $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Ü7. Überprüfen Sie für jede der folgenden Gleichungen, ob Sie für beliebige Teilmengen A, B, C einer festen Menge M richtig oder falsch sind. Geben Sie einen Beweis bzw. ein Gegenbeispiel an.

(i) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C$;

(ii) $(A \cup B) \setminus B = (A \setminus B) \cup B$;

(iii) $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$.

Ü8. (a) Geben Sie Beispiele für Relationen an, die zwei der Eigenschaften einer Äquivalenzrelation erfüllen, aber nicht die dritte.

(b) Wie viele Äquivalenzrelationen gibt es auf einer vier- bzw. einer fünfelementigen Menge?

Hinweis: Sie können in (b) ausnutzen, dass sich jede Äquivalenzrelation $R \subseteq M \times M$ durch ihre Äquivalenzklassen beschreiben lässt. Die Menge der Äquivalenzklassen $M/R = \{[m]_R \mid m \in M\}$ bildet eine Partition von M.

Ü9. Untersuchen Sie, welche der folgenden Relationen R auf der jeweiligen Grundmenge A Äquivalenzrelationen sind. Bestimmen Sie gegebenenfalls die Äquivalenzklassen.

(i) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, R = \big\{(1, 6), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 4), (4, 2), (4, 3), (6, 1)\big\} \cup \Delta_A$;

(ii) $A = \mathbb{R}, R = \big\{(x, y) \mid \exists k \in \mathbb{Z} \colon x = y + 2k\pi\big\}$;

(iii) $A = \mathbb{R}, R = \big\{(x, y) \mid |x - y| < \pi\big\}$;

(iv) $A = \mathbb{Z} \times \big(\mathbb{Z} \setminus \{0\}\big), R = \big\{\big((a, b), (c, d)\big) \mid ad = bc\big\}$.

Hinweis: Die Relation $\Delta_A = \big\{(a, a) \mid a \in A\big\}$ bezeichnet die *identische Relation* auf A.

A10. **Hausaufgabe, bitte vor Beginn der 3. Übung (oder im Lernraum) unter Angabe von Name, Matrikelnummer, Übungsgruppe und Übungsleiter abgeben.**

(a) Beweisen Sie, dass für beliebige Teilmengen A, B, C einer festen Menge M gilt:

$$(A \setminus B) \cap (A \setminus C) = A \setminus (B \cup C).$$

(b) Zeigen Sie, dass der Durchschnitt zweier Äquivalenzrelationen auf einer festen Menge M wieder eine Äquivalenzrelation auf M ist.

H11. (a) Es sei $A = \{a, b\}$, $B = \mathcal{P}(A)$, und $C = \mathcal{P}(B)$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

(i)	$\{a\} \in A$,	(ii)	$\{a\} \in B$,	(iii)	$\{a\} \in C$,	(iv)	$\{\{a\}\} \subseteq B$,
(v)	$\{\{a\}\} \in C$,	(vi)	$\{\emptyset\} \subseteq A$,	(vii)	$\{\emptyset\} \subseteq B$,	(viii)	$\{\emptyset\} \subseteq C$.

(b) Beweisen Sie, dass die folgenden Beziehungen

(i) $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cap B)$,

(ii) $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$

für beliebige Teilmengen A, B einer festen Menge M gelten. Gilt sogar Gleichheit? Begründen Sie!

H12. Seien A, B, C Teilmengen einer festen Menge M.

(a) Überprüfen Sie, ob die Differenz $\setminus$ eine assoziative Mengenoperation ist, d.h. ob gilt:

$$A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C.$$

(b) Überprüfen Sie, ob die *symmetrische Differenz* $A \,\Delta\, B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ eine assoziative Mengenoperation ist, d.h. ob gilt:

$$A \,\Delta\, (B \,\Delta\, C) = (A \,\Delta\, B) \,\Delta\, C.$$