TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Bereich Mathematik und Naturwissenschaften, Fakultät Mathematik, Institut für Algebra
Jun.-Prof. Friedrich Martin Schneider, Dr. Henri Mühle. Wintersemester 2018/19

3. Übungsblatt zur Vorlesung "Diskrete Strukturen für Informatiker"

Relationen, Abbildungen

V. Der *Kern* einer Abbildung $f : M \to N$ ist definiert als

$$\ker f = \{(x,y) \in M \times M \mid f(x) = f(y)\}.$$

Zeigen Sie, dass $\ker f$ eine Äquivalenzrelation auf M ist, bestimmen Sie die Äquivalenzklassen.

Ü13. Prüfen Sie, welche der folgenden Abbildungen injektiv, surjektiv oder bijektiv sind. Schränken Sie, falls möglich, den Definitions- und Zielbereich derart ein, dass Sie eine bijektive Abbildung erhalten.

(i) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto |x|$;

(ii) $f\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sqrt{x}$;

(iii) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x\cos(x)$;

(iv) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad (x_1, x_2) \mapsto (x_1 + 2x_2, 3x_1 - x_2)$.

Ü14. Es sei $f\colon M \to N$ eine Abbildung.

(a) Zeigen Sie, dass $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$ für beliebige $A, B \subseteq M$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass f genau dann injektiv ist, wenn $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ für alle $A, B \subseteq M$ gilt.

(c) Geben Sie eine konkrete Abbildung f und zwei Mengen $A, B \subseteq M$ an, für die $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$ gilt.

Ü15. Gegeben ist die Abbildung

$$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad (x,y,z) \mapsto (x-y, y-z, z-x).$$

Bestimmen Sie die Urbildmengen $f^{-1}\big(\{(0,-1,1)\}\big)$ und $f^{-1}\big(\{(1,1,2)\}\big)$. Nutzen Sie diese Information, um zu zeigen, dass f weder injektiv noch surjektiv ist.

A16. **Hausaufgabe, bitte vor Beginn der 4. Übung (oder im Lernraum) unter Angabe von Name, Matrikelnummer, Übungsgruppe und Übungsleiter abgeben.**

(a) Gegeben ist die Relation

$$R = \big\{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x + y \text{ ist gerade}\big\}.$$

Prüfen Sie, welche der Eigenschaften *reflexiv*, *irreflexiv*, *symmetrisch*, *antisymmetrisch*, *transitiv* die Relation R besitzt.

(b) Gegeben ist die Abbildung

$$f\colon \{0, 1\} \times \{0, 1\} \to \{-1, 0, 1\}, \quad (x, y) \mapsto x - y.$$

Prüfen Sie, ob f injektiv, surjektiv oder sogar bijektiv ist. Begründen Sie Ihre Antwort!

H17. Gegeben ist die parameterabhängige Abbildung $f_a\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (mit $a \in \mathbb{R}$) durch

$$f_a(x) = \begin{cases} 2x + 3, & \text{für } x \leq 1, \\ (x - a)^2 + 1, & \text{für } x > 1. \end{cases}$$

Geben Sie den Wertebereich von f in Abhängigkeit von a an. Finden Sie alle Parameterwerte für a, sodass f_a

(i) injektiv, (ii) surjektiv, (iii) bijektiv

ist.

H18. (a) Sind die folgenden sechs Abbildungen $f_k\colon \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} \to \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, für $k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, bijektiv?

$$\begin{array}{llllll} \text{(i)} & f_1(x) = x, & \text{(ii)} & f_2(x) = 1 - x, & \text{(iii)} & f_3(x) = \dfrac{1}{x}, \\ \text{(iv)} & f_4(x) = \dfrac{1}{1 - x}, & \text{(v)} & f_5(x) = \dfrac{x - 1}{x}, & \text{(vi)} & f_6(x) = \dfrac{x}{x - 1}. \end{array}$$

(b) Bilden Sie die Hintereinanderausführung $f_k \circ f_j$ von jeweils zwei dieser Abbildungen. Für welche Fälle gilt $f_k \circ f_j = f_j \circ f_k$?