TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Bereich Mathematik und Naturwissenschaften, Fakultät Mathematik, Institut für Algebra

Jun.-Prof. Friedrich Martin Schneider, Dr. Henri Mühle. Wintersemester 2018/19

6. Übungsblatt zur Vorlesung "Diskrete Strukturen für Informatiker"

Kardinalitäten, Algebraische Strukturen

V. Für $n \in \mathbb{N}$ und $k \in \mathbb{Z}$ definieren wir den *Binomialkoeffizienten* über

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!}, & \text{falls } 0 \leq k \leq n, \\ 0, & \text{falls } k < 0 \text{ oder } k > n. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass für $n > 0$ folgende Beziehung gilt:

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}.$$

Ü31. Für $m \in \mathbb{N}$ sei $U_m = \{n \in \mathbb{N} \mid n \leq m \text{ und } n \text{ ist ungerade}\}$.

(a) Geben Sie die Mengen U_0, U_1 und U_6, sowie die entsprechenden Potenzmengen konkret an.

(b) Bestimmen Sie die Kardinalität von $\mathcal{P}(U_m)$ für beliebiges $m \in \mathbb{N}$.

Ü32. Über zwei Mengen A und B ist folgendes bekannt.

(i) $A \cup B = \{x^2 + y \mid x \in \{0,1,2\}, y \in \{0,1,2\}\}$.

(ii) $|A| = |B| + 3$.

(iii) $|A \cap B| = 2$.

(iv) $B \subseteq \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ist gerade}\}$.

Dadurch sind die Mengen A und B jedoch nicht eindeutig festgelegt.

(a) Geben Sie alle Mengen B elementweise an, die obige vier Bedingungen erfüllen.

(b) Wie viele Mengenpaare (A, B) gibt es, die obige Bedingungen erfüllen?

Hinweis: Sie dürfen die Gleichung $|A| + |B| = |A \cup B| + |A \cap B|$ verwenden.

Ü33. Es sei M eine endliche Menge.

(a) Zeigen Sie, dass $(\mathcal{P}(M), \cap)$ ein kommutatives Monoid ist.

(b) Für $A, B \subseteq M$ sei die *symmetrische Differenz* definiert als

$$A \,\Delta\, B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

Zeigen Sie, dass $(\mathcal{P}(M), \Delta)$ eine kommutative Gruppe ist.

(c) Zeigen Sie, dass $(\mathcal{P}(M), \Delta, \cap)$ ein kommutativer Ring mit 1 ist.

Hinweis: In (b) können Sie Aufgabe H12 benutzen.

A34. **Hausaufgabe, bitte vor Beginn der 7. Übung (oder im Lernraum) unter Angabe von Name, Matrikelnummer, Übungsgruppe und Übungsleiter abgeben.**

(a) Für $m \in \mathbb{N}$ sei $A_m = \{n \in \mathbb{N} \mid m < n \leq 4m\}$.

(i) Geben Sie die Mengen A_0, A_1, und A_2 sowie die Potenzmengen $\mathcal{P}(A_0)$ und $\mathcal{P}(A_1)$ konkret an.

(ii) Bestimmen Sie die Kardinalität von $\mathcal{P}(A_m)$ für beliebiges $m \in \mathbb{N}$.

(b) Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass folgende Gleichung für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ gilt:

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0.$$

H35. Es sei M eine endliche Menge.

(a) Für $f, g \in \{0,1\}^M$ sei das *punktweise Produkt* definiert als

$$f \odot g \colon M \to \{0,1\}, \quad x \mapsto f(x) \cdot g(x).$$

Zeigen Sie, dass $\big(\{0,1\}^M, \odot\big)$ ein kommutatives Monoid ist.

(b) Für $f, g \in \{0,1\}^M$ sei die *punktweise Summe* definiert als

$$f \oplus g \colon M \to \{0,1\}, \quad x \mapsto \begin{cases} 0, & \text{falls } f(x) = g(x), \\ 1, & \text{falls } f(x) \neq (x). \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass $\big(\{0,1\}^M, \oplus\big)$ eine kommutative Gruppe ist.

(c) Zeigen Sie, dass $\big(\{0,1\}^M, \oplus, \odot\big)$ ein kommutativer Ring mit 1 ist.

H36. Es sei e die Eulersche Zahl. Für $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ ist der *natürliche Logarithmus* von x die eindeutig bestimmte Zahl $y \in \mathbb{R}$ für die $y = e^x$ gilt. Wir bezeichnen diese Zahl üblicherweise mit $\ln x$.

Sei nun $M = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$. Für $x, y \in M$ sei $x \circ y = x^{\ln y}$. Zeigen Sie, dass $(M, \circ)$ eine kommutative Gruppe ist.