TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Bereich Mathematik und Naturwissenschaften, Fakultät Mathematik, Institut für Algebra
Jun.-Prof. Friedrich Martin Schneider, Dr. Henri Mühle. Wintersemester 2018/19

7. Übungsblatt zur Vorlesung "Diskrete Strukturen für Informatiker"

Teilbarkeit

$\boxed{\text{V.}}$ Zeigen Sie, dass die Teilbarkeitsrelation auf $\mathbb{N}$ eine Ordnungsrelation ist.

Ü37. Wie in der Vorlesung eingeführt, bezeichne $T(n) = \{a \in \mathbb{N} \mid a \text{ teilt } n\}$ die *Teilermenge* von n.

(a) Geben Sie die Teilermengen $T(60)$ und $T(550)$ explizit an, und zeichnen Sie jeweils ein Teilerdiagramm.

(b) Finden Sie eine bijektive Abbildung $f\colon T(60) \to T(550)$, sodass für alle $x, y \in T(60)$ gilt: $x \mid y$ genau dann wenn $f(x) \mid f(y)$.

Ü38. Berechnen Sie mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus' für jedes der nachstehenden Zahlenpaare (x, y) den größten gemeinsamen Teiler $\mathrm{ggT}(x, y)$, sowie eine Darstellung $\mathrm{ggT}(x, y) = ax + by$ mit $a, b \in \mathbb{Z}$.

$$\text{(i)}\quad x = 108, y = 42, \quad \text{(ii)}\quad x = 144, y = 89, \quad \text{(iii)}\quad x = 560, y = 126.$$

Ü39. Beweisen Sie, dass $n^5 - n$ für jede natürliche Zahl n durch fünf teilbar ist, einerseits durch vollständige Induktion, und andererseits durch geschickte Zerlegung in Faktoren.

A40. **Hausaufgabe, bitte vor Beginn der 8. Übung (oder im Lernraum) unter Angabe von Name, Matrikelnummer, Übungsgruppe und Übungsleiter abgeben.**
Für $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ bezeichne a_i die i-te Ziffer Ihrer Matrikelnummer. Erzeugen Sie zunächst die Zahlen $x = 100a_1 + 10a_2 + a_3$ und $y = 100a_5 + 10a_6 + a_7$.

(a) Bestimmen Sie die Teilermengen $T(x)$ und $T(y)$, und zeichnen Sie jeweils ein Teilerdiagramm.

(b) Berechnen Sie den größten gemeinsamen Teiler von x und y mittels des Euklidischen Algorithmus'. Geben Sie eine Darstellung $\mathrm{ggT}(x, y) = ax + by$ mit $a, b \in \mathbb{Z}$ an.

H41. Für eine Menge $M \subseteq \mathbb{N}$ bezeichnen wir mit $\sup M$ das *Supremum* von M, also die kleinste Zahl $y \in \mathbb{N}$ die $x \leq y$ für alle $x \in M$ erfüllt.

(a) Sei $M \subseteq \mathbb{N}_{>0}$ mit $|M| = 6$ und $\sup M = 14$. Zeigen Sie, dass es zwei verschiedene, nichtleere Teilmengen $A, B \subseteq M$ gibt, sodass $\sum_{x \in A} x = \sum_{x \in B} x$ gilt.

(b) Sei $M \subseteq \mathbb{N}_{>0}$ mit $|M| = 1008$ und $\sup M = 2014$. Zeigen Sie, dass es zwei verschiedene Zahlen $x, y \in M$ gibt, sodass entweder $x \mid y$ oder $y \mid x$ gilt.

Hinweis: Verwenden Sie das Schubfachprinzip.

H42. Wie viele gekürzte Brüche $\frac{a}{b}$ mit $0 < \frac{a}{b} \leq 1$, $b < 15$, und $a, b \in \mathbb{N}$ gibt es?