TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Bereich Mathematik und Naturwissenschaften, Fakultät Mathematik, Institut für Algebra

Jun.-Prof. Friedrich Martin Schneider, Dr. Henri Mühle. Wintersemester 2018/19

8. Übungsblatt zur Vorlesung "Diskrete Strukturen für Informatiker"

Primzahlen, Zahlentheoretische Funktionen

$\boxed{\text{V.}}$ Zeigen Sie, dass für beliebige natürliche Zahlen m, n gilt:

$$m \cdot n = \text{ggT}(m,n) \cdot \text{kgV}(m,n).$$

Ü43. Für $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir die beiden Abbildungen

$$\begin{aligned} \tau\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}, &\quad n \mapsto \big|\{k \in \mathbb{N} \mid k \text{ teilt } n\}\big|, \\ \varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}, &\quad n \mapsto \big|\{k \in \mathbb{N} \mid k < n \text{ und } \text{ggT}(k,n) = 1\}\big|. \end{aligned}$$

Bestimmen Sie für die nachstehenden Zahlen $n \in \mathbb{N}$ jeweils die Primfaktorzerlegung, sowie die Werte $\tau(n)$ und $\varphi(n)$.

(i) $n = 10$, (ii) $n = 100$, (iii) $n = 101$, (iv) $n = 1001$, (v) $n = 10!$.

Ü44. Von der Zahl 14803 ist bekannt, dass sie das Produkt von genau zwei Primzahlen ist, und dass $\varphi(14803) = 14560$ gilt. Berechnen Sie mit diesen Informationen die Primfaktoren von 14803.

Ü45. (a) Beweisen Sie, dass $n^5 - 5n^3 + 4n$ für jede natürliche Zahl n durch 120 teilbar ist.

(b) Für welche Primzahlen p ist $p^2 - 1$ durch 24 teilbar?

(c) Zeigen Sie, dass jede sechsstellige Zahl der Form *ababab* durch sieben teilbar ist.

Hinweis: Stellen Sie die Zahlen in (a) und (b) zunächst als geeignete Produkte dar. In (c) empfiehlt es sich, die Dezimaldarstellung zu verwenden.

A46. **Hausaufgabe, bitte vor Beginn der 9. Übung (oder im Lernraum) unter Angabe von Name, Matrikelnummer, Übungsgruppe und Übungsleiter abgeben.**

(a) Erzeugen Sie erneut mit Hilfe Ihrer Matrikelnummer die Zahlen x und y wie in Aufgabe A40. Geben Sie die Primfaktorzerlegung von x und y an, und berechnen Sie $\varphi(x)$ und $\varphi(y)$.

(b) Finden Sie alle natürlichen Zahlen $n \in \{1, 2, \ldots, 100\}$ die genau fünf Teiler haben, und begründen Sie warum das alle sind.

H47. Finden Sie die kleinste positive natürliche Zahl n mit der folgenden Eigenschaft:

> Für alle Primzahlen p gilt, dass p genau dann ein Teiler von n ist, wenn auch $p - 1$ ein Teiler von n ist.

<u>Hinweis:</u> Eine solche Zahl gibt es wirklich. Allerdings ist das Finden der Lösung durch Ausprobieren recht aufwändig. Wenn Sie (bei 1 beginnend) pro Zahl eine Minute zum Überprüfen brauchen, werden Sie die Lösung erst nach etwas mehr als einem Tag finden.

H48. Seien $x, y \in \mathbb{N}$ derart, dass der Euklidische Algorithmus nach n Schritten den Output (d, s, t) liefert. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\text{ggT}(x, y) = d = sx + ty.$$

<u>Hinweis:</u> Es seien $r_0, r_1, \ldots, r_{n+1}$ die im Euklidischen Algorithmus erzeugten Reste. Zeigen Sie zunächst, dass $\text{ggT}(r_{i+1}, r_i) = \text{ggT}(r_i, r_{i-1})$ für alle $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ gilt.