

Einführung in die Mathematik für Informatiker

Prof. Dr. Ulrike Baumann

Institut für Algebra

21.10.2019

- $\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ ist die Menge aller komplexen Zahlen.
- Komplexe Zahlen kann man durch
 - kartesische Koordinaten: $z = a + bi$
bzw.
 - Polarkoordinaten: $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = re^{i\varphi}$beschreiben und diese Darstellungen ineinander umrechnen.
- Rechenoperationen für komplexe Zahlen
 - $+, -, \cdot, :$ in kartesischen Koordinaten
 - $\cdot, :$ in Polarkoordinaten

2. Vorlesung

- Beispiel: „Komplexe Uhr“
- Potenzieren komplexer Zahlen:
Satz von MOIVRE – Formel von MOIVRE
- Berechnung n -ter Wurzeln komplexer Zahlen:
 - Gesucht: alle Lösungen von $x^n = 1$ in $\mathbb{C}$
(n -te Einheitswurzeln)
 - Gesucht: alle Lösungen von $x^n = z_0$ in $\mathbb{C}$
- Ausblick: Lösbarkeit von Gleichungen der Form
 $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$ in $\mathbb{C}$
 - Satz von GAUSS - Fundamentalsatz der Algebra
 - $n = 2$ (Lösen von quadratischen Gleichungen)

Potenzieren in $\mathbb{C}$

Sei $z \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} z &= r e^{i\varphi} \\ z^2 &= r^2 e^{i2\varphi} \\ z^3 &= r^3 e^{i3\varphi} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Satz von MOIVRE:

Für $n \in \mathbb{N}$ gilt: $z^n = r^n e^{i n \varphi}$
--

Formel von MOIVRE – Sonderfall $r = 1$:

$$\underbrace{z^n = e^{i n \varphi}}$$

Diese Zahlen z^n liegen auf dem Einheitskreis.

Der Einheitskreis ist ein Kreis um 0 mit dem Radius 1.

n -te Einheitswurzeln

Die Lösungen der Gleichung $z^n = 1$ in $\mathbb{C}$ für eine natürliche Zahl $n \geq 1$ heißen n -te Einheitswurzeln.

Die Lösungen dieser Gleichung sind:

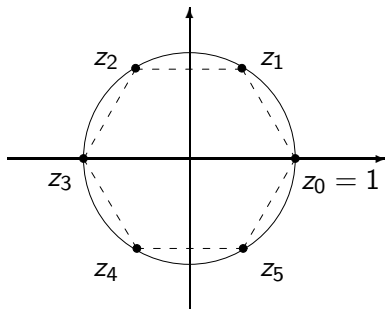
$$z_k = e^{i\frac{2\pi k}{n}} \quad (k = 0, 1, \dots, n-1)$$

Probe: $(z_k)^n = \left(e^{i\frac{2\pi k}{n}}\right)^n = e^{i2\pi k} = 1$

Geometrische Interpretation der n -ten Einheitswurzeln

Die Lösungen der Gleichung $z^n = 1$ in $\mathbb{C}$ bilden die Eckpunkte eines regulären n -Ecks, das dem Einheitskreis eingeschrieben ist.

Beispiel: $n = 6$



Berechnung n -ter Wurzeln in $\mathbb{C}$

Berechnen aller Lösungen von $z^n = r_0 e^{i\varphi_0}$ in $\mathbb{C}$:

Ansatz: $z = r e^{i\varphi}$

Einsetzen in die gegebene Gleichung:

$$(r e^{i\varphi})^n = r_0 e^{i\varphi_0}$$

$$r^n (e^{i\varphi})^n = r_0 e^{i\varphi_0}$$

$$r^n e^{i n \varphi} = r_0 e^{i\varphi_0}$$

$$z_k = \sqrt[n]{r_0} e^{i \frac{\varphi_0 + 2\pi k}{n}} \quad (k = 0, 1, \dots, n-1)$$

Probe:

$$\begin{aligned}(z_k)^n &= \left(\sqrt[n]{r_0} e^{i \frac{\varphi_0 + 2\pi k}{n}} \right)^n = (\sqrt[n]{r_0})^n \left(e^{i \frac{\varphi_0 + 2\pi k}{n}} \right)^n \\ &= r_0 e^{i(\varphi_0 + 2\pi k)} = r_0 e^{i\varphi_0} \cdot e^{i2\pi k} = r_0 e^{i\varphi_0} \cdot 1 = r_0 e^{i\varphi_0}\end{aligned}$$

Zusammenhang zu den n -ten Einheitswurzeln

Man erhält alle Lösungen von

$$z^n = a + bi = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = r e^{i\varphi}$$

in $\mathbb{C}$,

wenn man eine festen Lösung z_0
dieser Gleichung

mit

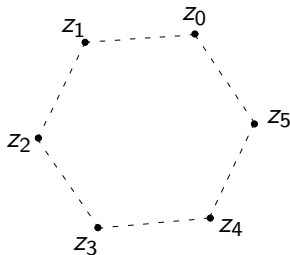
allen n -ten Einheitswurzeln w_k
multipliziert:

$$z_k = z_0 \cdot w_k \quad (k = 0, 1, \dots, n-1)$$

Probe:

$$(z_k)^n = (z_0 \cdot w_k)^n = (z_0)^n \cdot (w_k)^n = r e^{i\varphi} \cdot 1 = r e^{i\varphi}$$

z.B. $n = 6$



Lösbarkeit von Gleichungen in $\mathbb{C}$

- In $\mathbb{C}$ ist die Gleichung $x^2 = -1$ lösbar;
Lösungen: $\pm i$
- In $\mathbb{C}$ sind alle Gleichungen $x^2 = z_0$ ($z_0 \in \mathbb{C}$) lösbar.
- In $\mathbb{C}$ sind alle Gleichungen $ax^2 + bx + c = 0$
($a, b, c \in \mathbb{C}, a \neq 0$) lösbar.
- **Fundamentalsatz der Algebra**
In $\mathbb{C}$ sind alle Gleichungen

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

mit $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}, a_n \neq 0$ lösbar.