

Einführung in die Mathematik für Informatiker

Lineare Algebra

Prof. Dr. Ulrike Baumann
Institut für Algebra

28.10.2019

Die Menge der komplexen Zahlen bildet einen Körper $(\mathbb{C}; +, \cdot)$.

- Addition und Multiplikation erfüllen die Körperaxiome.
 - Jedes Polynom n -ten Grades über \mathbb{C} hat eine Nullstelle in \mathbb{C} .
-

Körper werden in der Vorlesung Diskrete Strukturen als algebraische Strukturen formal eingeführt.

In der Linearen Algebra verwenden wir vorab folgende Beispiele für Körper:

- Körper \mathbb{R} der reellen Zahlen
- Körper \mathbb{C} der komplexen Zahlen
- Körper $\text{GF}(2)$ – endlicher Körper mit 2 Elementen 0, 1

3. Vorlesung

- Lineare Gleichungssysteme (LGS) über K mit m Gleichungen in n Unbekannten
 - Lösungsmenge
 - homogene und inhomogene LGS
- $m \times n$ -Matrizen über K
 - Rechnen mit Matrizen
(Transponieren, Skalarmultiplikation, Addition, Multiplikation)
 - Rechenregeln
- Matrixschreibweise für LGS
- Beispiel aus der Codierungstheorie

LGS über K mit m Gleichungen in n Unbekannten

- LGS mit m Gleichungen in n Unbekannten x_1, x_2, \dots, x_n über einem Körper K :

$$\begin{array}{cccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

$a_{ij} \in K$ ($i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$)
sind die Koeffizienten.

$b_i \in K$ ($i = 1, 2, \dots, m$) sind die Absolutglieder.

- Kurzform:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

Lösungen, Lösungsmenge eines LGS

- (l_1, l_2, \dots, l_n) ($l_j \in K$ für $j = 1, 2, \dots, n$) wird eine Lösung des LGS genannt, wenn

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}l_j = b_i \quad \text{für } i = 1, 2, \dots, m$$

erfüllt ist.

- Die Menge L aller Lösungen des LGS heißt Lösungsmenge dieses LGS.

- $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m)$ heißt homogenes LGS.

Jedes homogene LGS hat mindestens eine Lösung, nämlich $(0, 0, \dots, 0)$.

- $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i \quad (i = 1, 2, \dots, m)$ heißt inhomogenes LGS,
wenn für ein $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ gilt:

$$b_i \neq 0$$

$(0, 0, \dots, 0)$ ist nicht in der Lösungsmenge eines inhomogenen LGS enthalten.

$m \times n$ -Matrizen über K

- Eine $m \times n$ -Matrix über dem Körper K ist eine Abbildung

$$A : \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\} \rightarrow K : (i, j) \mapsto a_{ij}$$

-

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Kurzform: $A = (a_{ij})_{m \times n} = (a_{ij})_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n}}$

- $K^{m \times n}$ bezeichnet die Menge aller $m \times n$ -Matrizen über dem Körper K .

Spezielle Matrizen

- $A = (a_{ij})_{m \times n}$ mit $a_{ij} = 0$ für alle i, j heißt $m \times n$ -Nullmatrix;
Bezeichnung: $0_{m \times n}$
- Eine $m \times n$ -Matrix mit $m = n$ heißt quadratische Matrix.
- Für die quadratische Matrix $A = (a_{ij})_{n \times n}$ bilden die Elemente $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ die Hauptdiagonale.
- Ist $A = (a_{ij})$ eine quadratische Matrix mit $a_{ij} = 0$ für alle i, j mit $i \neq j$, dann nennt man A eine Diagonalmatrix.

- Die $n \times n$ -Matrix $E_n := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ heißt

Einheitsmatrix.

Rechnen mit Matrizen (1)

- Transponieren:

Sei $A = (a_{ij}) \in K^{m \times n}$. Dann wird $A^T := (a_{ij}^T) \in K^{n \times m}$ mit $a_{ij}^T := a_{ji}$ die zu A transponierte Matrix genannt.

- Skalarmultiplikation:

Sei $A = (a_{ij}) \in K^{m \times n}$ und $k \in K$.

$$kA := (ka_{ij}) \in K^{m \times n}$$

- Addition:

Seien $A = (a_{ij})$ und $B = (b_{ij})$ Elemente von $K^{m \times n}$.

$$A + B := (a_{ij} + b_{ij}) \in K^{m \times n}$$

- Subtraktion:

Seien $A = (a_{ij})$ und $B = (b_{ij})$ Elemente von $K^{m \times n}$.

$$A - B := A + (-1)B$$

Rechnen mit Matrizen (2)

- Es sei $A \in K^{m \times n}$ und $B \in K^{n \times p}$.
Man nennt die Matrix $C = (c_{ij}) \in K^{m \times p}$ mit

$$c_{ij} := \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$$

das Produkt von A und B .

Bemerkung: Es gilt

$$(c_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix}.$$

Rechenregeln für Matrizen (1)

- Wenn für Matrizen A , B , C die Produkte AB und BC definiert sind, dann sind auch die Produkte $(AB)C$ und $A(BC)$ definiert und es gilt:

$$(AB)C = A(BC)$$

- Es gilt

$$A(B + C) = AB + AC \text{ und } (A + B)C = AC + BC,$$

falls die entsprechenden Summen und Produkte definiert sind.

- Für jede quadratischen Matrix $A \in K^{n \times n}$ gilt:

$$AE_n = E_n A = A$$

Rechenregeln für Matrizen (2)

Es gilt

- $(A^T)^T = A$
- $(kA)^T = kA^T$
- $(A + B)^T = A^T + B^T$
- $(AB)^T = B^T A^T$,

falls die entsprechenden Summen und Produkte definiert sind.

Matrixschreibweise für LGS

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m \times n} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{n \times 1} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}_{m \times 1}$$

Kurzform: $Ax = b$