

Einführung in die Mathematik für Informatiker

Lineare Algebra

Prof. Dr. Ulrike Baumann
Institut für Algebra

4.11.2019

4. Vorlesung

- Rückblick: Rechnen mit Matrizen aus $K^{n \times n}$
- LGS in Matrixschreibweise
- Lösungsverfahren für LGS
 - Ablesen der Lösungsmenge
 - Elementare Zeilenumformungen
 - Eliminationsverfahren nach GAUSS
 - Eliminationsverfahren nach GAUSS/JORDAN
- Beispiel: Hamming-Codes über $GF(2)$

Rückblick: Rechnen mit Matrizen aus $K^{n \times n}$

- ① $A + (B + C) = (A + B) + C$ für alle $A, B, C \in K^{n \times n}$
- ② $A + 0_{n \times n} = 0_{n \times n} + A = A$ für alle $A \in K^{n \times n}$
- ③ Zu jeder Matrix $A \in K^{n \times n}$ gibt es eine Matrix $-A := (-1) \cdot A$ mit $A + (-A) = (-A) + A = 0_{n \times n}$.
- ④ $A + B = B + A$ für alle $A, B \in K^{n \times n}$
- ⑤ $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$ für alle $A, B, C \in K^{n \times n}$
- ⑥ $A \cdot E_n = E_n \cdot A = A$ für alle $A \in K^{n \times n}$
- ⑦ $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ für alle $A, B, C \in K^{n \times n}$

Es gibt Matrizen A, B mit $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Es gibt Matrizen A , durch die man nicht dividieren kann.

Matrixschreibweise für LGS

LGS über einem Körper K mit m Gleichungen in n Unbekannten:

- Kurzform:

$$A \cdot x = b \quad \text{bzw.} \quad A_{m \times n} \cdot x_{n \times 1} = b_{m \times 1}$$

mit $A \in K^{m \times n}$, $x \in K^{n \times 1}$, $b \in K^{m \times 1}$

- Langform:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} \cdot x_1 + \dots + a_{1n} \cdot x_n \\ \vdots \\ a_{m1} \cdot x_1 + \dots + a_{mn} \cdot x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

(Erweiterte) Koeffizientenmatrix eines LGS

- Koeffizientenmatrix:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

- erweiterte Koeffizientenmatrix:

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

Elementare Zeilenumformungen

- Elementare Zeilenumformungen:
 - ① Vertauschen zweier Zeilen
 - ② Multiplizieren einer Zeile mit einem Faktor $k \in K \setminus \{0\}$
 - ③ Addieren des k -fachen ($k \in K$) einer Zeile zu einer anderen Zeile
- Die Lösungsmenge des LGS ändert sich nicht, wenn man eine elementare Zeilenumformung für die erweiterte Koeffizientenmatrix des LGS durchführt.
- Durch Hintereinanderausführung von elementaren Zeilenumformungen kann jede erweiterte Koeffizientenmatrix eines LGS in

Zeilenumformung

bzw.

reduzierte Zeilenumformung

gebracht werden.

Eliminationsverfahren nach GAUSS

- ① Umformung des LGS auf Zeilenstufenform

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \circledast & & & & & & * \\ & \circledast & * & & & & * \\ & & & & & & \vdots \\ & & & & & & * \\ & & 0 & & \circledast & * & * \end{array} \right) \quad \text{mit } \circledast \neq 0$$

- ② Lösbarkeitsentscheidung

- ③ Für lösbare LGS:
Rückwärtseinsetzen zur Ermittlung der Lösungen des LGS

Eliminationsverfahren nach GAUSS / JORDAN

① Umformung des LGS auf Zeilenstufenform

② Lösbarkeitsentscheidung

③ Für lösbare LGS:

weitere Umformung des LGS auf reduzierte Zeilenstufenform

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \circledast & 0 & & 0 & & * \\ & \circledast & * & & 0 & * \\ & & & 0 & & \\ & & & \ddots & 0 & \vdots \\ & & 0 & & \circledast & * \\ & & & & & * \end{array} \right) \quad \text{mit } \circledast = 1$$

und Ablesen der Lösungen des LGS

Lösungsmenge von LGS über unendlichen Körpern K

- Ein homogenes LGS hat immer die triviale Lösung $(0, 0, \dots, 0)$.

Ein homogenes LGS über einem unendlichen Körper K hat

- entweder genau eine Lösung (d.h. nur die triviale Lösung)

oder

- unendlich viele

Lösungen.

- Ein inhomogenes LGS über einem unendlichen Körper K hat

- entweder keine

oder

- genau eine

oder

- unendlich viele

Lösungen.

Beispiel: Hamming-Codes über $\text{GF}(2)$

Es sei H eine $m \times (2^m - 1)$ -Matrix über $\text{GF}(2)$, deren Spalten paarweise verschieden sind und mindestens einen von Null verschiedenen Eintrag haben.

$$\mathcal{C} := \left\{ \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{2^m-1} \end{pmatrix} \in \{0, 1\}^{2^m-1} \mid H \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{2^m-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_{m \times 1} \right\}$$

wird binärer Hamming-Code der Länge $2^m - 1$ genannt.
Dieser Code ist 1-fehlerkorrigierend.