Einführung in die Mathematik für Informatiker

Lineare Algebra

Prof. Dr. Ulrike Baumann
Institut für Algebra

11.11.2019

Die Lineare Algebra ist die Theorie der Vektorräume und der linearen Abbildungen.

- Definition Vektor, Vektorraum
- Beispiele für Vektorräume
- Rechenregeln für Vektoren
- Untervektorräume

Definition Vektorraum

Sei $(K; +, \cdot)$ ein Körper.

Ein K-Vektorraum $(V; +, (k \mid k \in K))$ (kurz: K-Vektorraum V) besteht aus einer

- Menge V,
- einer Addition $\oplus$ und
- einer Skalarmultiplikation $(k \mid k \in K)$,

für die die Eigenschaften (V1) bis (V10) erfüllt sind.

Man spricht auch von einem Vektorraum (über dem Körper K).

Die Elemente eines Vektorraums nennt man Vektoren.

Für $K = \mathbb{R}$ heißt V reeller Vektorraum.

Für $K = \mathbb{C}$ heißt V komplexer Vektorraum.

Vektorraum-Axiome

(V1) Für je zwei Elemente $v_1, v_2 \in V$ ist $v_1 \oplus v_2$ ein eindeutig bestimmtes Element von V.

(V2) Es gilt $v_1 \oplus (v_2 \oplus v_3) = (v_1 \oplus v_2) \oplus v_3$ für alle $v_1, v_2, v_3 \in V$.

(V3) Es gilt $v_1 \oplus v_2 = v_2 \oplus v_1$ für alle $v_1, v_2 \in V$.

(V4) Es gibt ein Element 0 in V (Nullvektor) mit $0 \oplus v = v \oplus 0 = v$ für alle $v \in V$.

(V5) Es gibt zu jedem $v \in V$ ein Element $-v$ in V mit $v \oplus (-v) = (-v) \oplus v = 0$.

(V6) Für jedes $k \in K$ und jedes $v \in V$ ist kv ein eindeutig bestimmtes Element von V.

(V7) Es gilt 1v=v für alle $v \in V$.

(V8) Es gilt $(k_1 \cdot k_2)v = k_1(k_2 v)$ für alle $k_1, k_2 \in K$ und alle $v \in V$.

(V9) Es gilt $(k_1 + k_2)v = k_1 v \oplus k_2 v$ für alle $k_1, k_2 \in K$ und alle $v \in V$.

(V10) Es gilt $k(v_1 \oplus v_2) = kv_1 \oplus kv_2$ für alle $k \in K$ und alle $v_1, v_2 \in V$.

Rechenregeln für Vektoren

Es sei V ein K-Vektorraum, 0_K das Nullelement des Körpers K und 0_V der Nullvektor aus V.

Dann gilt für alle Vektoren $v \in V$ und alle Skalare $k \in K$:

(R1) $0_K v = 0_V \quad$ (kurz: $0v = 0$)

(R2) $k0_V = 0_V \quad$ (kurz: $k0 = 0$)

(R3) $kv = 0_V \Rightarrow k = 0_K$ oder $v = 0_V \quad$ (kurz: $k = 0$ oder $v = 0$)

(R4) $(-k)v = -(kv)$, insbesondere: $(-1)v = -v$

Beispiele für Vektorräume

- $K^{m \times n}$ mit der Matrizenadditition und Skalarmultiplikation über dem Körper K
- $\mathbb{R}^n := \mathbb{R}^{n\times 1}, \quad \mathbb{C}^n := \mathbb{C}^{n\times 1}, \quad \mathrm{GF}(2)^n := \mathrm{GF}(2)^{n\times 1}$
- $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, GF(2), allgemein: Körper K
- Linearcodes (Codierungstheorie)
- $C[a, b]$

  Die Vektoren sind reellwertige Funktionen, die auf dem reellen Intervall $[a, b]$ stetig sind.
- $\mathcal{P}(M)$ für jede Menge M mit der Addition $A \oplus B := A \triangle B$ und der Skalarmultiplikation $0A := \emptyset$, $1A = A$ über dem Körper GF(2).

Untervektorräume

- Eine Teilmenge U eines K-Vektorraums V heißt Untervektorraum von V, wenn gilt:

  (U1) U enthält den Nullvektor 0 von V.

  (U2) Aus $u_1 \in U$ und $u_2 \in U$ folgt $u_1 \oplus u_2 \in U$.

  (U3) Aus $k \in K$ und $u \in U$ folgt $ku \in U$.

- Ein Untervektorraum eines K-Vektorraums V ist wieder ein K-Vektorraum (mit den Einschränkungen der Operationen von V auf U).

- Jeder Vektorraum V enthält die trivialen Untervektorräume $\{0\}$ und V.

- Der Untervektorraum $\{0\}$ des Vektorraums V wird Nullraum genannt.

Spannraum Span(T)

- Der Durchschnitt von Untervektorräumen des Vektorraums V ist ein Untervektorraum von V.

- Zu jeder Teilmenge $T \subseteq V$ gibt es einen kleinsten Untervektorraum, der alle Elemente von T enthält. Insbesondere ist der Nullraum der kleinste Untervektorraum, der die leere Menge enthält.

- Sei V ein K-Vektorraum und $T \subseteq V$.
  Man nennt den kleinsten Untervektorraum von V, der alle Elemente von T enthält, den Spannraum von T.

  Dieser Untervektorraum wird mit Span(T) bezeichnet.