

Einführung in die Mathematik für Informatiker

Lineare Algebra

Prof. Dr. Ulrike Baumann
Institut für Algebra

18.11.2019

6. Vorlesung

- Spannraum $\text{Span}(T)$, Linearkombinationen von Vektoren
- Lineare Unabhängigkeit von Vektoren
- Lineare Abhängigkeit von Vektoren
- Basis und Dimension eines Vektorraums
- Koordinatenvektoren

Lineare Algebra

- Spannraum $\text{Span}(T)$, **Linear**kombinationen von Vektoren
- **Lineare** Unabhängigkeit von Vektoren
- **Lineare** Abhängigkeit von Vektoren
- Basis und Dimension eines Vektorraums
- Koordinatenvektoren

Untervektorräume eines Vektorraums werden auch
Lineare Teilräume genannt.

Rückblick: Untervektorraum

Sei $(V; +, (k \mid k \in K))$ ein K -Vektorraum.

Eine Teilmenge U von V bildet einen Untervektorraum von V , wenn gilt:

① $0_V \in U$

② U ist abgeschlossen bezüglich der Addition, die auf V erklärt ist:

$$v_1, v_2 \in U \Rightarrow v_1 + v_2 \in U$$

③ U ist abgeschlossen bezüglich der Skalarmultiplikation des Vektorraums V :

$$k \in K \text{ und } v \in U \Rightarrow kv \in U$$

Spannraum $\text{Span}(T)$

- Der Durchschnitt von Untervektorräumen des Vektorraums V ist ein Untervektorraum von V .
- Zu jeder Teilmenge $T \subseteq V$ gibt es einen kleinsten Untervektorraum, der alle Elemente von T enthält. Insbesondere ist der Nullraum der kleinste Untervektorraum, der die leere Menge enthält.
- Sei V ein K -Vektorraum und $T \subseteq V$.
Man nennt den kleinsten Untervektorraum von V , der alle Elemente von T enthält, den Spannraum von T .
Dieser Untervektorraum von V wird mit $\text{Span}(T)$ bezeichnet.

Linearkombinationen

- Sind $v_1, v_2, \dots, v_n$ Vektoren aus einem K -Vektorraum V und $k_1, k_2, \dots, k_n$ Elemente von K , dann nennt man

$$k_1 v_1 + k_2 v_2 + \dots + k_n v_n \in V$$

eine Linearkombination der Vektoren $v_1, v_2, \dots, v_n$.

- Sei V ein K -Vektorraum.
Für jede Teilmenge $T = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ erhält man den Spannraum $\text{Span}(T)$ als Menge aller Linearkombinationen von Vektoren aus T :

$$\text{Span}(T) = \{k_1 t_1 + k_2 t_2 + \dots + k_n t_n \mid k_1, k_2, \dots, k_n \in K\}$$

Lineare Unabhängigkeit, Lineare Abhängigkeit

- Eine Folge $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ von Vektoren aus einem K -Vektorraum V heißt linear unabhängig, wenn aus

$$k_1 v_1 + k_2 v_2 + \dots + k_n v_n = 0$$

mit $k_1, k_2, \dots, k_n \in K$ stets

$$k_1 = k_2 = \dots = k_n = 0$$

folgt. Andernfalls heißt die Folge linear abhängig.

- Man spricht auch von linear unabhängigen bzw. linear abhängigen Mengen von Vektoren (oder kurz von linear unabhängigen bzw. linear abhängigen Vektoren).

Die leere Menge $\emptyset$ ist linear unabhängig.

Basis eines Vektorraums

Eine Teilmenge B eines K -Vektorraums V heißt Basis von V , wenn gilt:

- $V = \text{Span}(B)$
- B ist linear unabhängig.

Bemerkung:

Gilt $V = \text{Span}(\{v_1, v_2, \dots, v_n\})$, dann nennt man $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ein Erzeugendensystem von V .

Basen eines Vektorraums sind linear unabhängige Erzeugendensysteme.

Basisdarstellung

- Ist $B = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ eine (angeordnete) Basis des K -Vektorraums V , so lässt sich jeder Vektor $v \in V$ eindeutig als Linearkombination

$$v = k_1 b_1 + k_2 b_2 + \dots + k_n b_n$$

mit $k_1, k_2, \dots, k_n \in K$ und $b_1, b_2, \dots, b_n \in B$ darstellen.

- Diese eindeutig bestimmten Skalare $k_1, k_2, \dots, k_n \in K$ nennt man die Koordinaten des Vektors v bezüglich der Basis $(b_1, b_2, \dots, b_n)$;
- Koordinatenvektor v_B von v bezüglich der Basis B :

$$v_B = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}$$

Sätze über Basen von Vektorräumen

- Jeder Vektorraum V besitzt eine Basis.
- Jedes Erzeugendensystem von V enthält eine Basis von V :
Eine Basis ist ein minimales Erzeugendensystem des Vektorraums.
- Jede linear unabhängige Teilmenge von V kann durch Hinzunahme weiterer Vektoren zu einer Basis von V ergänzt werden:
Eine Basis ist eine maximale linear unabhängige Teilmenge des Vektorraums.
- Je zwei Basen eines Vektorraums haben die gleiche Anzahl von Elementen.

Diese Aussage folgt aus dem Austauschsatz von Steinitz:

$$v \in \text{Span}(T \cup \{w\}) \text{ und } v \notin \text{Span}(T) \Rightarrow w \in \text{Span}(T \cup \{v\})$$

Dimension eines Vektorraums

Die Dimension $\dim(V)$ eines Vektorraums V ist die Mächtigkeit einer Basis von V .

Ist B eine Basis des Vektorraums V mit $|B| = n \in \mathbb{N}$, dann gilt:

$$\dim(V) = n$$

Beispiele:

- $\mathbb{R}^n$ ist ein n -dimensionaler Vektorraum.
- $\mathbb{C}^n$ ist ein n -dimensionaler Vektorraum.

Standardbasis: $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ mit $e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i$

Es sei V ein K -Vektorraum mit $\dim(V) = n$.

- Je n linear unabhängige Vektoren bilden eine Basis.
- Jedes Erzeugendensystem mit n Elementen bildet eine Basis.
- Mehr als n Vektoren sind stets linear abhängig.
- Für jeden Untervektorraum U von V mit $U \neq V$ gilt $\dim(U) < \dim(V)$.

Linear abhängige Vektoren

- Enthält eine Folge von Vektoren den Nullvektor, dann ist sie linear abhängig.
- Es sei V ein K -Vektorraum und $v_1, v_2, \dots, v_n$ seien Vektoren aus V . Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

① Die Folge $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ ist linear abhängig.

② Es gibt ein $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ mit

$$v_i \in \text{Span}(\{v_1, v_2, \dots, v_n\} \setminus \{v_i\}).$$

③ Es gibt ein $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ mit

$$\text{Span}(\{v_1, v_2, \dots, v_n\}) = \text{Span}(\{v_1, v_2, \dots, v_n\} \setminus \{v_i\}).$$

Linear unabhängige Vektoren

Es sei V ein K -Vektorraum und $v_1, v_2, \dots, v_n$ seien Vektoren aus V . Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- ① Die Folge $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ ist linear unabhängig.
- ② Jeder Vektor $v \in \text{Span}(\{v_1, v_2, \dots, v_n\})$ ist eindeutig als Linearkombination

$$v = k_1 v_1 + k_2 v_2 + \dots + k_n v_n$$

mit $k_1, k_2, \dots, k_n \in K$ darstellbar.