Einführung in die Mathematik für Informatiker

Lineare Algebra

Prof. Dr. Ulrike Baumann
Institut für Algebra

25.11.2019

7. Vorlesung

- Struktur der Lösungsmenge von LGS
  - Untervektorraum, Basis, Dimension
  - affiner Teilraum
- Kern einer Matrix
- Rang einer Matrix
  - Zeilenraum
  - Spaltenraum
  - Lösbarkeitskriterium für LGS

Rückblick (1): LGS mit m Gleichungen in n Unbekannten

- $$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

- $$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{n\times 1} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}_{m\times 1}$$

- Kurzform: $\boxed{Ax = b}$

Rückblick (2): LGS mit m Gleichungen in n Unbekannten

- $$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$
- $$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} \cdot x_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} \cdot x_2 + \dots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \cdot x_n = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$
- Kurzform: $\boxed{Ax = b}$

Struktur der Lösungsmenge homogener LGS

Es sei $A_{m\times \underline{n}} x_{\underline{n}\times 1} = 0_{m\times 1}$ ein homogenes LGS über dem Körper K.

- $0_{n\times 1}$ ist eine Lösung.

  Sind $x_1 \in K^n$ und $x_2 \in K^n$ Lösungen,
  dann ist auch $x_1 + x_2 \in K^n$ eine Lösung dieses LGS.

  Ist $x_1 \in K^n$ eine Lösung und $k \in K$, dann ist auch $kx \in K^n$ eine Lösung dieses LGS.

- Die Menge der Lösungen eines homogenen LGS $Ax = 0$ mit einer $m \times n$-Koeffizientenmatrix A über K bildet einen Untervektorraum von K^n.

- Die Lösungsmenge des homogenen LGS $Ax = 0$ wird Kern der Matrix A genannt:

$$\mathrm{Ker}(A) := \{x \in K^n \mid Ax = 0\}$$

Struktur der Lösungsmenge inhomogener LGS

Es sei $Ax = b$ ein inhomogenes LGS über K und $Ax = 0$ das zugehörige homogene LGS.

- Ist x_1 eine spezielle Lösung von $Ax = b$ und x^* eine Lösung von $Ax = 0$, dann ist $x_1 + x^*$ eine Lösung von $Ax = b$.

- Sind x_1 und x_2 Lösungen von $Ax = b$, dann ist $x_2 - x_1$ eine Lösung x^* des homogenen LGS $Ax = 0$.

- Ist L^* die Lösungsmenge von $Ax = 0$ und x_1 eine spezielle Lösung von $Ax = b$, dann ist

$$x_1 + L^* = \{x_1 + x^* \mid x^* \in L^*\}$$

  die Lösungsmenge von $Ax = b$.

Affine Teilräume

- Es sei V ein K-Vektorraum.

  Ist U ein Untervektorraum von V und $v \in V$, dann wird

  $$T := v + U = \{v + u \mid u \in U\}$$

  ein affiner Teilraum von V genannt.

  $\dim(T) := \dim(U)$ heißt Dimension des affinen Teilraums T.

- Die Lösungsmenge jedes LGS über einem Körper K bildet einen affinen Teilraum von K^n.

  Dieser affine Teilraum ist genau dann ein Untervektorraum von K^n, wenn des LGS homogen ist.

Zeilenraum und Spaltenraum

- Ist $A = (s_1, s_2, \ldots, s_n) = (z_1, z_2, \ldots, z_m)^T$ eine $m \times n$-Matrix über einem Körper K mit den Spaltenvektoren $s_1, s_2, \ldots, s_n$ und den Zeilenvektoren $z_1, z_2, \ldots, z_m$, dann wird

$$\mathrm{Col}(A) := \mathrm{Span}(\{s_1, s_2, \ldots, s_n\}) \subseteq K^m$$

  der Spaltenraum von A und

$$\mathrm{Row}(A) := \mathrm{Span}(\{z_1, z_2, \ldots, z_m\}) \subseteq K^n$$

  der Zeilenraum von A genannt.

- $\mathrm{Col}(A) = \{b \in K^m \mid \text{Es gibt ein } x \in K^n \text{ mit } Ax = b.\}$

- $\mathrm{Col}(A) = K^m$ gilt genau dann, wenn $Ax = b$ für jedes $b \in K^m$ eine Lösung hat.

- $\mathrm{Row}(A) = \mathrm{Col}(A^T)$

- Für jede Matrix A gilt: $\dim \mathrm{Col}(A) = \dim \mathrm{Row}(A)$

Rang einer Matrix

- Für jede Matrix A gilt $\dim \operatorname{Col}(A) = \dim \operatorname{Row}(A)$.
- Der Rang $\operatorname{rg}(A)$ einer Matrix A ist wie folgt definiert:

$$\operatorname{rg}(A) := \dim \operatorname{Col}(A) = \dim \operatorname{Row}(A)$$

- Lösbarkeitskriterium für LGS:

  Ein LGS mit der Koeffizientenmatrix A und der erweiterten Koeffizientenmatrix $(A \mid b)$ ist genau dann lösbar, wenn

$$\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A \mid b)$$

  gilt.