Einführung in die Mathematik für Informatiker

Lineare Algebra

Prof. Dr. Ulrike Baumann
Institut für Algebra

2.12.2019

8. Vorlesung

- Rangberechnung für Matrizen, Dimensionsformel
- reguläre Matrizen – Berechnung der inversen Matrix

. . . .

- Lineare Abbildungen
  - Lineare Fortsetzung
  - Kern und Bild, Dimensionsformel

Rückblick: Elementare Zeilenumformungen

1. Vertauschen zweier Zeilen
2. Multiplizieren einer Zeile mit einem Faktor $k \in K \setminus \{0\}$
3. Addieren des k-fachen ($k \in K$) einer Zeile zu einer anderen Zeile

Elementare Zeilenumformungen ändern die Lösungsmenge des LGS $Ax = b$ nicht.

Rangberechnung für Matrizen

- Elementare Zeilenumformungen ändern den Rang einer Matrix nicht.

- Bringt man eine Matrix A mittels elementarer Zeilenumformungen auf Zeilenstufenform,
  so ist der Rang $\mathrm{rg}(A)$ von A die Anzahl der Zeilen,
  in denen nicht nur Nullen als Einträge erscheinen.

- Satz: (Dimensionsformel)

  Ist $A \in K^{m \times n}$, dann gilt:

$$\mathrm{rg}(A) + \dim \mathrm{Ker}(A) = n$$

Rückblick: Inverse Matrix (Kann man durch Matrizen dividieren?)

- Eine quadratische Matrix $A \in K^{n \times n}$ heißt invertierbar, wenn es eine Matrix $A^{-1} \in K^{n \times n}$ mit

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E_n$$

  gibt. Die eindeutig bestimmte Matrix $\underline{A^{-1}}$ mit dieser Eigenschaft wird die zu A inverse Matrix genannt.

- Die inverse Matrix A^{-1} einer invertierbaren Matrix $A \in K^{n \times n}$ kann man durch paralleles Lösen von n linearen LGS mit der Koeffizientenmatrix A berechnen.

Paralleles Lösen von n LGS $Ax = e_i$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{1n} \\ \vdots \\ b_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Berechnung der inversen Matrix zu $A \in K^{n \times n}$

1. Notiere $(A \mid E_n)$, wobei E_n die n-reihige Einheitsmatrix bezeichnet.

2. Mit elementaren Zeilenumformungen bringe man $(A \mid E_n)$ in Zeilenstufenform $(B \mid \ldots)$.

3. Enthält $(B \mid \ldots)$ eine Nullzeile, so existiert A^{-1} nicht.

   Andernfalls setze man mit elementaren Zeilenumfomungen so lange fort, bis man eine Matrix in reduzierter Zeilenstufenform erhält:

$$(A \mid E_n) \to \ \ldots \ \to (B \mid \ldots) \to \ \ldots \ \to (E_n \mid A^{-1})$$

   Die inverse Matrix zu A kann man unmittelbar aus dieser Darstellung ablesen.

Inverse spezieller Matrizen

- Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in K^{2\times 2}$ und $ad - bc \neq 0$.
  Dann gilt:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

- Sind $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn} \in K \setminus \{0\}$, dann gilt:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ldots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11}^{-1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{22}^{-1} & \ldots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn}^{-1} \end{pmatrix}$$

- $E_n^{-1} = E_n$

Äquivalente Bedingungen

Es sei $A \in K^{n \times n}$.

1. A ist eine invertierbare Matrix.
2. A^T ist eine invertierbare Matrix.
3. Die Spaltenvektoren von A sind linear unabhängig.
4. Die Zeilenvektoren von A sind linear unabhängig.
5. $\mathrm{rg}(A) = n$
6. $\dim \mathrm{Col}(A) = n$
7. $\mathrm{Ker}(A) = \{0_{K^n}\}$
8. $\dim \mathrm{Ker}(A) = 0$

- Sei K ein Körper.

  Eine Abbildung $f : V \to W$ von einem Vektorraum V über K in einen Vektorraum W über K heißt lineare Abbildung (oder Homomorphismus), wenn für alle $v_1, v_2 \in V$ und alle $k \in K$ gilt:

  1. $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$ (Additivität)
  2. $f(kv_1) = k\,f(v_1)$ (Homogenität)

- Jede lineare Abbildung $f : V \to W$ bildet den Nullvektor 0_V von V auf den Nullvektor 0_W von W ab:

$$f(0_V) = 0_W$$

Kriterien für die Linearität einer Abbildung

Für Vektorräume V und W über einem Körper K und eine Abbildung $f : V \to W$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- Die Abbildung f ist linear.
- Für alle $v_1, v_2 \in V$ und alle $k_1, k_2 \in K$ gilt:

$$f(k_1 v_1 + k_2 v_2) = k_1 f(v_1) + k_2 f(v_2) \quad \text{(Linearität)}$$

Lineare Fortsetzung

Jede lineare Abbildung $f : V \to W$ ist durch die Bilder der Basisvektoren von V eindeutig bestimmt:

Ist

$$\varphi : B \to W : b \mapsto \varphi(b)$$

eine Abbildung von einer Basis $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ von V in den Vektorraum W, dann gibt es genau eine lineare Abbildung

$$f : V \to W$$

mit

$$f(b_i) = \varphi(b_i) \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

nämlich:

$$f : V \to W : k_1 b_1 + \cdots + k_n b_n \mapsto k_1 f(b_1) + \cdots + k_n f(b_n)$$

Man nennt diese eindeutig bestimmte Abbildung f die lineare Fortsetzung von φ auf V.

Kern und Bild einer linearen Abbildung

Sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung.

- $\mathrm{Ker}(f) := \{v \in V \mid f(v) = 0_W\} \subseteq V$ heißt Kern von f.

  $\mathrm{Im}(f) := \{f(v) \mid v \in V\} \subseteq W$ nennt man das Bild von f.

- $\mathrm{Ker}(f)$ ist ein Untervektorraum von V.

- $\mathrm{Im}(f)$ ist ein Untervektorraum von W.

- Eine lineare Abbildung f ist genau dann injektiv, wenn $\mathrm{Ker}(f) = \{0_V\}$ gilt.

Dimensionsformel

Ist V ein endlichdimensionaler Vektorraum, dann gilt für jede lineare Abbildung

$$f : V \to W$$

die folgende Gleichung:

$$\dim(V) = \dim(\underbrace{f^{-1}(\{0_W\})}_{\mathrm{Ker}(f)}) + \dim(\underbrace{f(V)}_{\mathrm{Im}(f)})$$