Einführung in die Mathematik für Informatiker

Lineare Algebra

Prof. Dr. Ulrike Baumann
Institut für Algebra

9.12.2019

9. Vorlesung

- Eigenschaften linearer Abbildungen
- Beschreibung linearer Abbildungen durch Matrizen

Eigenschaften linearer Abbildungen

Sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung.

$\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ sei eine Basis von V.

$w_i := f(b_i)$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ seien die Bilder der Basisvektoren.

1. f ist injektiv $\iff$ $\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ ist linear unabhängig
2. f ist surjektiv $\iff$ $\text{Span}(\{w_1, w_2, \dots, w_n\}) = W$
3. f ist bijektiv $\iff$ $\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ ist eine Basis von W

Lineare Abbildungen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : v \mapsto Av$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ Die identische Abbildung bildet jeden Vektor auf sich selbst ab.

$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ Die Nullabbildung bildet jeden Vektor auf den Nullvektor ab.

$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ Jeder Vektor (a, b) wird auf den doppelten Vektor $(2a, 2b)$ abgebildet.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ Senkrechte Projektion auf die x-Achse

$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ Senkrechte Projektion auf die Winkelhalbierende des ersten Quadranten

$A = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$ Linksdrehung um den Koodinatenursprung um den Winkel φ

$A = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & -\cos(\varphi) \end{pmatrix}$ Spiegelung an der Geraden, die gegen die x-Achse mit dem Winkel $\frac{\varphi}{2}$ geneigt ist

Lineare Abbildungen $f_A : v \mapsto Av$

- Jede Matrix $A \in K^{m \times n}$ beschreibt eine lineare Abbildung f_A vom K-Vektorraum K^n in den K-Vektorraum K^m:

$$f_A : K^n \to K^m : v \mapsto Av$$

- Jede lineare Abbildung aus einem n-dimensionalen K-Vektorraum in einen m-dimensionalen K-Vektorraum lässt sich mit einer geeigneten Matrix $A \in K^{m \times n}$ beschreiben.

Darstellung linearer Abbildungen bezüglich der Standardbasen

Es sei $f : K^n \to K^m$ eine lineare Abbildung,
$v = (v_1, \ldots, v_n)^T \in K^n$
und $(e_1, \ldots, e_n)$ die Standardbasis von K^n.

$$\begin{aligned}
f(v) &= f(v_1 e_1 + \cdots + v_n e_n) \\
&= v_1 f(e_1) + \cdots + v_n f(e_n) \\
&= \underbrace{(f(e_1), \ldots, f(e_n))}_{=:\, A} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \\
&= Av \\
&= f_A(v)
\end{aligned}$$

Darstellungsmatrix einer linearen Abbildung

Es sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung eines K-Vektorraums V mit $\dim(V) = n$ in einen K-Vektorraum W mit $\dim(W) = m$.

$B = (b_1, \ldots, b_n)$ sei eine geordnete Basis von V.

$C = (c_1, \ldots, c_m)$ sei eine geordnete Basis von W.

- Man nennt die Matrix

  $$A_{BC} := (f(b_1)_C, \ldots, f(b_n)_C)$$

  die Darstellungsmatrix von f bezüglich der Basen B und C.

  Die i-te Spalte von A_{BC} ist der Koordinatenvektor bezüglich der Basis C des Bildes des i-ten Basisvektors aus der Basis B.

- Der Koordinatenvektor $f(v)_C$ von $f(v)$ bezüglich C ist das Produkt der Darstellungsmatrix mit dem Koordinatenvektor v_B von v bezüglich B:

  $$f(v)_C = A_{BC} \cdot v_B$$

Hintereinanderausführung linearer Abbildungen

Es sei $f_1 : V_1 \to V_2$ eine lineare Abbildung des K-Vektorraums V_1 in den K-Vektorraum V_2 und $f_2 : V_2 \to V_3$ eine lineare Abbildung des K-Vektorraums V_2 in den K-Vektorraum V_3. Dann gilt:

- $f_2 \circ f_1 : V_1 \to V_3$ eine lineare Abbildung.
- B_i sei eine geordnete Basis von V_i für $i = 1, 2, 3$.

  $A_{B_1 B_2}$ sei die Darstellungsmatrix von f_1 bezüglich der Basen B_1 und B_2.

  $A_{B_2 B_3}$ sei die Darstellungsmatrix von f_2 bezüglich der Basen B_2 und B_3.

  Dann ist

  $$A_{B_2 B_3} \cdot A_{B_1 B_2}$$

  die Darstellungsmatrix der linearen Abbildung $f_2 \circ f_1$ bezüglich der Basen B_1 und B_3.

Bijektive lineare Abbildungen

- Ist $f : V \to W$ eine bijektive lineare Abbildung, so ist auch $f^{-1} : W \to V$ eine bijektive lineare Abbildung.
- Die Darstellungsmatrix einer linearen Abbildung kann man bezüglich beliebiger Basen bilden.
- Eine lineare Abbildung $f : V \to W$ eines K-Vektorraums V ist genau dann bijektiv, wenn die Darstellungsmatrizen für f invertierbar sind.