Einführung in die Mathematik für Informatiker

Lineare Algebra

Prof. Dr. Ulrike Baumann
Institut für Algebra

16.12.2019

10. Vorlesung

- Eigenschaften von Determinanten
- Berechnung von Determinanten
  für 2-reihige und 3-reihige Matrizen
- Definition von Determinanten für *n*-reihige Matrizen
  („Entwicklungssatz“)
- Multiplikationssatz für Determinanten

Eigenschaften von Determinanten

$\det : K^{n\times n} \to K : A \mapsto \det(A)$

Die Determinante ist eine Abbildung det, die durch folgende Eigenschaften festgelegt ist:

- det ist <u>multilinear</u>,
  d.h. $\det \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_i + kz_i^* \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_i \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} + k \det \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_i^* \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$

- det ist <u>alternierend</u>,
  d.h. hat A zwei gleiche Zeilen, dann gilt $\det(A) = 0$.

- det ist <u>normiert</u>,
  d.h. $\det(E_n) = 1$.

Determinante einer 2×2-Matrix

- Ist $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in K^{2\times 2}$, so wird

$$\det(A) := a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \in K$$

die Determinante von A genannt.

- Sind $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ und $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$ Vektoren aus dem $\mathbb{R}^2$, so bilden die Punkte

$$0,\ v,\ w,\ v+w$$

die Ecken eines Parallelogramms mit dem Flächeninhalt F:

$$F = \left| \det \begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{pmatrix} \right|$$

Determinante einer 3×3-Matrix

- Regel von Sarrus:

  Ist $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in K^{3\times 3}$, so wird

  $$\det(A) := a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{33}a_{12}a_{21}$$

  die Determinante von A genannt.

- Es gilt

  $$\det(A) = a_{11} \cdot \det \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - a_{21} \cdot \det \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{31} \cdot \det \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

Definition der Determinante

Für jede quadratische Matrix $A \in K^{n \times n}$ und $i, j \in \{1, \dots, n\}$ bezeichne

$$A_{ij} \in K^{(n-1) \times (n-1)}$$

diejenige Matrix, die aus A durch Streichen der i-ten Zeile und der j-ten Spalte entsteht.

Es sei $A = (a_{ij}) \in K^{n \times n}$.

- Für $n = 1$, d.h. $A = \begin{pmatrix} a_{11} \end{pmatrix}$, ist $\det(A) := a_{11}$.
- Für $n \geq 2$ ist

$$\det(A) := \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} \det(A_{i1}) \, .$$

Entwicklungssatz

Für $A = (a_{ij}) \in K^{n \times n}$ und beliebige $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ gilt:

- Entwicklung nach der i-ten Zeile:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$$

- Entwicklung nach der j-ten Spalte:

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$$

Die Vorzeichen ergeben sich nach der Schachbrettregel:

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Rechenregeln für Determinanten

Für $A = (z_1, \ldots, z_n)^T = (s_1, \ldots, s_n)$ und $k \in K$ gilt:

- $\det \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ kz_i \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = k \cdot \det \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_i \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$

- $\det(s_1, \ldots, ks_j, \ldots, s_n) = k \cdot \det(s_1, \ldots, s_j, \ldots, s_n)$

- Entsteht A' aus A durch Vertauschen zweier Zeilen (bzw. Spalten), dann gilt $\det(A') = -\det(A)$.

- Entsteht A' aus A durch Addition eines Vielfachen einer Zeile (bzw. einer Spalte) zu einer anderen, dann gilt $\det(A') = \det(A)$.

Sonderfälle für Determinanten

- $$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = 1$$

- $$\det \begin{pmatrix} d_1 & * & \dots & * \\ 0 & d_2 & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{pmatrix} = d_1 \cdot d_2 \cdot \ldots \cdot d_n$$

- $$\det \left(\begin{array}{c|c} A & * \\ \hline 0 & B \end{array} \right) = \det(A) \cdot \det(B)$$

Multiplikationssatz und Folgerungen

- Multiplikationssatz:
  Gilt $A, B \in K^{n\times n}$, so gilt:
  $$\det(A\cdot B) = \det(A)\cdot\det(B)$$
- Für Matrizen $A \in K^{n\times n}$ sind folgende Aussagen äquivalent:
  (1) Die Matrix A ist invertierbar.
  (2) Es gilt $\det(A) \neq 0$.
- Es gilt $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$.

  Außerdem gilt: $\quad \det(A^T) = \det(A) = \dfrac{1}{\det(A^{-1})}$.

Berechnung inverser Matrizen

- Es sei $A \in K^{n \times n}$ und $\det(A) \neq 0$.

  Dann gilt:

  $$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \big(\underbrace{(-1)^{i+j} \det(A_{ji})}_{\textit{Stelle }(i,j)} \big),$$

  wobei A_{ji} aus A durch Streichen von Zeile j und Spalte i entsteht.

- Beispiel: Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ und $\det(A) = ad - bc \neq 0$.

  Dann gilt:

  $$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$