Einführung in die Mathematik für Informatiker

Lineare Algebra

Prof. Dr. Ulrike Baumann
Institut für Algebra

6.1.2020

- Eigenwerte und Eigenvektoren von Matrizen
- Charakteristisches Polynom $\chi_A(x)$ einer Matrix $A \in K^{n\times n}$
  - Die Eigenwerte von A sind Nullstellen von $\chi_A(x)$.
- Eigenvektoren einer Matrix $A \in K^{n\times n}$
  - Eigenraum von A zum Eigenwert k
  - linear unabhängige Eigenvektoren von A

Eigenwerte und Eigenvektoren

- Es sei K ein Körper.

  Ein Element $k \in K$ wird ein Eigenwert der quadratischen Matrix $A \in K^{n \times n}$ genannt, wenn es einen Vektor $v \in K^n \setminus \{0\}$ mit

  $$Av = kv$$

  gibt. Ein solcher Vektor v wird ein Eigenvektor der Matrix A zum Eigenwert k genannt.

- Der Nullvektor $0 \in K^n$ ist für keinen Eigenwert der Matrix A ein Eigenvektor.

- Es gibt Matrizen, für die das Nullelement $0 \in K$ ein Eigenwert ist.

Eigenwerte von A

- Eine Matrix $A \in K^{n \times n}$ hat genau dann den Eigenwert $k \in K$, wenn

$$\det(A - kE_n) = 0$$

gilt.

- 0 ist ein Eigenwert von $A \iff A^{-1}$ existiert nicht

- Eine Matrix $A \in K^{n \times n}$ hat genau dann den Eigenwert $k \in K$, wenn das homogene lineare Gleichungssystem

$$(A - kE_n)v = 0$$

eine Lösung $v \neq 0$ besitzt.

Charakteristisches Polynom von A

- Der Ausdruck

  $$\chi_A(x) := \det(A - xE_n) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0$$

  wird charakteristisches Polynom der Matrix $A \in K^{n \times n}$ genannt.

- $k \in K$ ist ein Eigenwert von A genau dann, wenn k eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms von A ist:

  $$\chi_A(k) = c_n \cdot k^n + c_{n-1} \cdot k^{n-1} + \cdots + c_1 \cdot k + c_0 = 0$$

Folgerungen

- Jede Matrix $A \in K^{n \times n}$ hat höchstens n Eigenwerte.

- Jede Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ hat genau n Eigenwerte, wenn jeder Eigenwert mit seiner Vielfachheit (als Nullstelle von χ_A) gezählt wird.

- Ist A eine reelle symmetrische Matrix, d.h. $A^T = A$, dann sind alle Eigenwerte $k \in \mathbb{C}$ von A reell.

- Ist $A = (a_{ij}) \in K^{n \times n}$ und sind $k_1,\ k_2, \ldots, k_n$ die Eigenwerte von A, dann gilt

$$\begin{aligned} \det(A) &= k_1 \cdot k_2 \cdot \ldots \cdot k_n \\ \mathrm{Spur}(A) &= k_1 + k_2 + \ldots + k_n \end{aligned}$$

  Dabei ist $\mathrm{Spur}(A) := a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$.

Eigenvektoren zum Eigenwert k

Sei $A \in K^{n \times n}$ und k sei ein Eigenwert von A.

- Die Elemente von $\mathrm{Ker}(A - k \cdot E_n) \setminus \{0\}$ sind die zu k gehörigen Eigenvektoren von A.
- $\mathrm{Ker}(A - k \cdot E_n)$ ist der Eigenraum von A zum Eigenwert k.
- Der Eigenraum von A zum Eigenwert k ist ein Untervektorraum von K^n.
- Sind $k_1, \ldots, k_t$ paarweise verschiedene Eigenwerte von A mit zugehörigen Eigenvektoren $v_1, \ldots, v_t$ (also $Av_i = k_i v_i$), dann sind die Vektoren $v_1, \ldots, v_t$ linear unabhängig.