Fibonacci-Zahlen f_n

0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	...
f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	...

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} f_{n+1} \\ f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_n + f_{n-1} \\ f_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \begin{pmatrix} f_n \\ f_{n-1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n}_{A^n} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Die Eigenwerte der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sind k und $1-k$
  (denn $k + (1-k) = 1 + 0 = \mathrm{Spur}(A)$) mit $k = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ und $1 - k = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.
  Zur Abkürzung bezeichnen wir die Eigenwerte in den folgenden Rechnungen mit k und $1-k$.
- $\begin{pmatrix} k \\ 1 \end{pmatrix}$ ist ein Eigenvektor von A zum Eigenwert k.
- $\begin{pmatrix} 1-k \\ 1 \end{pmatrix}$ ist ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $1-k$.

....

- Man kann den Vektor $\begin{pmatrix} f_1 \\ f_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ als Linearkombination dieser beiden Eigenvektoren darstellen:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2k-1} \cdot \begin{pmatrix} k \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2k-1} \cdot \begin{pmatrix} 1-k \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Damit gilt:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} f_{n+1} \\ f_n \end{pmatrix} &= A^n \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= A^n \cdot \left(\frac{1}{2k-1} \cdot \begin{pmatrix} k \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2k-1} \cdot \begin{pmatrix} 1-k \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{2k-1} \left(A^n \cdot \begin{pmatrix} k \\ 1 \end{pmatrix} - A^n \cdot \begin{pmatrix} 1-k \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{2k-1} \left(k^n \cdot \begin{pmatrix} k \\ 1 \end{pmatrix} - (1-k)^n \cdot \begin{pmatrix} 1-k \\ 1 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

Daraus folgt (2.Zeile):

$$f_n = \frac{1}{2k-1} \cdot (k^n - (1-k)^n)$$

Setzt man $k = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ in diese Gleichung ein, erhält man die folgende explizite Darstellung der Elemente der Fibonacci-Folge:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right) \quad (n \in \mathbb{N},\ n \geq 0)$$