

Einführung in die Mathematik für Informatiker

Lineare Algebra

Prof. Dr. Ulrike Baumann
Institut für Algebra

20.1.2020

13. Vorlesung

- Orthogonale Vektoren
- Orthogonalraum (Orthogonales Komplement)
- Orthogonalbasis, Orthonormalbasis

Winkelmessung

Sei V ein euklidischer $\mathbb{R}$ -Vektorraum mit dem Skalarprodukt $\bullet$.

- Seien $u, v \in \{0_V\}$.

Das eindeutig bestimmte $\alpha \in [0, \pi]$ mit

$$\cos(\alpha) = \frac{u \bullet v}{||u|| \cdot ||v||}$$

heißt Winkel zwischen u und v .

- Seien $u, v \in V$.

Die Vektoren u und v heißen zueinander orthogonal, wenn $u \bullet v = 0$ gilt;

Bezeichnung: $u \perp v$

- Seien $u, v \in V$. Dann gilt:

$$u \perp v \iff ||u + v||^2 = ||u||^2 + ||v||^2$$

Orthogonalraum (Orthogonales Komplement)

- Sei U ein Untervektorraum des euklidischen $\mathbb{R}$ -Vektorraums V .

Die Menge aller Vektoren aus V , die orthogonal zu jedem Vektor $u \in U$ sind, heißt Orthogonalraum (orthogonales Komplement) $U^\perp$ von U in V .

- $U^\perp$ ist ein Untervektorraum von V .
- $v \in \text{Span}(\{v_1, \dots, v_k\})^\perp$ gilt genau dann, wenn v orthogonal zu $v_1, \dots, v_k$ ist.
- Es sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Dann gilt:

$$\text{Row}(A)^\perp = \text{Ker}(A) \quad \text{und} \quad \text{Col}(A)^\perp = \text{Ker}(A^T)$$

- Ist $\{v_1, \dots, v_k\}$ eine Menge von k Vektoren aus dem $\mathbb{R}^n$ mit $v_i \bullet v_j = 0$ für alle $i, j \in \{1, \dots, k\}$ mit $i \neq j$, dann ist $\{v_1, \dots, v_k\}$ linear unabhängig und somit eine Basis eines Untervektorraums von $\mathbb{R}^n$.
- Eine Basis $(b_1, \dots, b_k)$ eines Untervektorraums W von $\mathbb{R}^n$ wird eine Orthogonalbasis von W genannt, wenn

$$b_i \bullet b_j = 0$$

für alle $i, j \in \{1, \dots, k\}$ mit $i \neq j$ gilt.

- Eine Orthogonalbasis $(b_1, \dots, b_k)$ eines Untervektorraums W von $\mathbb{R}^n$ wird eine Orthonormalbasis von W genannt, wenn

$$\|b_i\| = 1$$

für alle $i \in \{1, \dots, k\}$ gilt.

- Es sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

Die Spaltenvektoren von A bilden eine Orthonormalbasis des Spaltenraums $\text{Col}(A)$ von A genau dann, wenn

$$A^T A = E_n$$

gilt.