Einführung in die Mathematik für Informatiker

Lineare Algebra

Prof. Dr. Ulrike Baumann
Institut für Algebra

3.2.2020

15. Vorlesung

- Orthogonale Matrizen
  - Definition
  - Konstruktion orthogonaler Matrizen
    Beispiel: orthogonale Matrizen in $\mathbb{R}^{2\times 2}$
  - Eigenschaften
    - Invertierbarkeit
    - Determinante
    - lineare Abbildungen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : x \mapsto Ax$
    - Eigenwerte
- *Fano-Code*
  Wie kann man Vektorräume in Kugeln zerlegen
  (und warum möchte man das tun)?

Orthogonale Matrizen

- Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.
  A wird eine orthogonale Matrix genannt, wenn gilt:

  $$A \cdot A^T = E_n$$

- Es gilt: $A \cdot A^T = E_n \iff A^T \cdot A = E_n$

- Jede orthogonale Matrix A ist invertierbar und es gilt:

  $$A^T = A^{-1}$$

Orthogonale Matrizen in $\mathbb{R}^{2\times 2}$

- Aus jeder Basis des $\mathbb{R}^n$ kann man eine Orthonormalbasis $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ konstruieren. Die Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit den Zeilenvektoren $b_1, b_2, \ldots, b_n$ ist eine orthogonale Matrix.

- $A_1 = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}$ ist eine orthogonale Matrix.

  A_1 beschreibt im $\mathbb{R}^2$ die Spiegelung an der Geraden durch den Ursprung, die gegen die x-Achse mit dem Winkel $\frac{\varphi}{2}$ geneigt ist.

- $A_2 = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ ist eine orthogonale Matrix.

  A_2 beschreibt im $\mathbb{R}^2$ die Linksdrehung um den Ursprung um den Winkel φ.

Orthogonale Abbildungen

- Eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ heißt orthogonal, wenn für alle $u, v \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$f(u) \bullet f(v) = u \bullet v$$

- Orthogonale Abbildungen sind längentreu.
- Orthogonale Abbildungen sind abstandstreu.
- Orthogonale Abbildungen sind winkeltreu.
- Orthogonale Abbildungen bilden jede Orthonormalbasis auf eine Orthonormalbasis ab.
- Die Darstellungsmatrix einer linearen Abbildung bezüglich einer Orthonormalbasis ist genau dann orthogonal, wenn die Abbildung orthogonal ist.
- Orthogonale Abbildungen sind bijektiv.

Eigenschaften orthogonaler Matrizen

Sei A eine orthogonale Matrix aus $\mathbb{R}^{n \times n}$. Dann gilt:

- A^{-1} existiert
- $|\det(A)| = 1$
- Die Eigenwerte von A sind komplexe Zahlen vom Betrag 1.
  Ist k ein reeller Eigenwert, dann gilt $k \in \{1, -1\}$.