TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Bereich Mathematik und Naturwissenschaften, Fakultät Mathematik, Institut für Algebra

Prof. Dr. Ulrike Baumann, Dr. Henri Mühle. Wintersemester 2019/20

10. Kurzlösung zur Vorlesung "Einführung in die Mathematik für Informatiker – Lineare Algebra"

Kern und Bild linearer Abbildungen, Darstellungsmatrizen

H59. (a) Die Bedingung, dass $Av = o$ genau eine Lösung besitzt bedeutet gerade, dass $\operatorname{Ker}(A) = \{o\}$ ist. Also ist $\dim \operatorname{Ker}(f) = \dim \operatorname{Ker}(A) = 0$. Mit der Dimensionsformel folgt $\dim \operatorname{Im}(f) = \dim \mathbb{R}^6 - \dim \operatorname{Ker}(f) = 6 - 0 = 6$.

(b) Es gilt $\dim \operatorname{Im}(g) = \operatorname{rg}(B) = 4$. Insbesondere ist $\dim \operatorname{Im}(g) < \dim \mathbb{R}^5 = 5$, also ist g nicht surjektiv.

H60. (a) (i) Es ist $\dim \operatorname{Im}(f) = 2$ und $\dim \operatorname{Ker}(f) = 1$.

(ii) Es ist

$$A_{BB} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$
$$A_{BC} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$
$$A_{CC} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ -2 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) (i) Es gilt $f(z) = zi = 0$ genau dann, wenn $z = 0$, also ist

$$\dim \operatorname{Ker}(f) = 0,$$
$$\dim \operatorname{Im}(f) = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} - \dim \operatorname{Ker}(f) = 2 - 0 = 2.$$

(ii) Es ist

$$A_{BB} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_{BC} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_{CC} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$