TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Bereich Mathematik und Naturwissenschaften, Fakultät Mathematik, Institut für Algebra

Prof. Dr. Ulrike Baumann, Dr. Henri Mühle. Wintersemester 2019/20

10. Übungsblatt zur Vorlesung "Einführung in die Mathematik für Informatiker – Lineare Algebra"

Kern und Bild linearer Abbildungen, Darstellungsmatrizen

Ü55. Betrachtet werden die reellen Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix},$$

sowie die linearen Abbildungen $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ und $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, gegeben durch

$$f(v) = Av \quad \text{und} \quad g(v) = Bv.$$

(a) Berechnen Sie jeweils die Dimension des Bildes und des Kerns dieser Abbildungen.

(b) Welche dieser Abbildungen sind injektiv, surjektiv oder gar bijektiv?

(c) Beschreiben Sie die inverse Abbildung g^{-1} durch eine Matrix M, sodass $g^{-1}(v) = Mv$ für alle $v \in \mathbb{R}^3$ gilt.

(d) Beschreiben Sie die Kompositionsabbildung $f \circ g$ durch eine Matrix C, sodass $(f \circ g)(v) = Cv$ für alle $v \in \mathbb{R}^3$ gilt.

Ü56. Im $\mathbb{R}^2$ sind die geordneten Basen

$$B = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \quad \text{und} \quad C = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right),$$

der Vektor $u = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, und die lineare Abbildung

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

gegeben.

(a) Berechnen Sie den Koordinatenvektor u_B.

(b) Bestimmen Sie die Darstellungssmatrizen A_{BB}, A_{BC} und A_{CC} von f.

(c) Berechnen Sie den Koordinatenvektor $f(u)_C$.

Ü57. (a) Beschreiben Sie eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, die einen gegebenen Vektor um 30° gegen den Uhrzeigersinn um den Koordinatenursprung dreht.

(b) Beschreiben Sie eine Matrix $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, die einen gegebenen Vektor an der xz-Ebene spiegelt.

A58. **Hausaufgabe, bitte vor Beginn der 11. Übung (oder im Lernraum) unter Angabe von Name, Matrikelnummer, Übungsgruppe und ÜbungsleiterIn abgeben.**

(a) Sei $f\colon V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen zwei $\mathbb{K}$-Vektorräumen V und W. Zeigen Sie, dass $\operatorname{Im}(f)$ ein Untervektorraum von W ist.

(b) Sei $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ die lineare Abbildung, die durch

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+y+z \\ 2x+3y-z \end{pmatrix}$$

gegeben ist. Bestimmen Sie Dimension des Bildes und des Kerns von f, und überprüfen Sie die Ergebnisse mit der Dimensionsformel.

H59. (a) Sei $A \in \mathbb{R}^{7\times 6}$ eine Matrix, sodass $Av = o$ genau eine Lösung hat. Bestimmen Sie die Dimension des Bildes und des Kerns der linearen Abbildung $f\colon \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^7$ gegeben durch $f(v) = Av$.

(b) Sei $B \in \mathbb{R}^{5\times 7}$ mit $\operatorname{rg}(B) = 4$. Bestimmen Sie die Dimension des Bildes der linearen Abbildung $g\colon \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^5$ gegeben durch $g(v) = Bv$. Ist g surjektiv?

H60. (a) Es sei V der $\mathbb{R}$-Vektorraum der reellen Polynomfunktionen vom Grad kleiner 3 mit den geordneten Basen $B = \big(1, x, x^2\big)$ und $C = \big(2, 2{+}x, x{-}2x^2\big)$, und die lineare Abbildung $f\colon V \to V$ definiert durch

$$f(a + bx + cx^2) = 3a - c + (a+b+c)x^2.$$

(i) Bestimmen Sie die Dimension des Bildes und des Kerns von f.

(ii) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrizen A_{BB}, A_{BC}, A_{CC} von f.

(b) Betrachtet wird der $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{C}$, die geordneten Basen $B = (1, -i)$ und $C = (1{+}i, 2{-}2i)$ von $\mathbb{C}$, sowie die lineare Abbildung $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = zi$.

(i) Bestimmen Sie die Dimension des Bildes und des Kerns von f.

(ii) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrizen A_{BB}, A_{BC}, A_{CC} von f.