



11. Kurzlösung zur Vorlesung
“Einführung in die Mathematik für Informatiker – Lineare Algebra”

Determinanten

Ü63. (a) Wir verwenden das Gauß-Verfahren.

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & x_0^3 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 \end{pmatrix} &= \det \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & x_0^3 \\ 0 & x_1 - x_0 & x_1^2 - x_0^2 & x_1^3 - x_0^3 \\ 0 & x_2 - x_0 & x_2^2 - x_0^2 & x_2^3 - x_0^3 \\ 0 & x_3 - x_0 & x_3^2 - x_0^2 & x_3^3 - x_0^3 \end{pmatrix} \\ &= (x_1 - x_0)(x_2 - x_0)(x_3 - x_0) \\ &\quad \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & x_0^3 \\ 0 & 1 & x_0 + x_1 & x_0^2 + x_0x_1 + x_1^2 \\ 0 & 1 & x_0 + x_2 & x_0^2 + x_0x_2 + x_2^2 \\ 0 & 1 & x_0 + x_3 & x_0^2 + x_0x_3 + x_3^2 \end{pmatrix} \\ &= (x_1 - x_0)(x_2 - x_0)(x_3 - x_0) \\ &\quad \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & x_0^3 \\ 0 & 1 & x_0 + x_1 & x_0^2 + x_0x_1 + x_1^2 \\ 0 & 0 & x_2 - x_1 & (x_2 - x_1 + x_0)(x_2 - x_1) \\ 0 & 0 & x_3 - x_1 & (x_3 - x_1 + x_0)(x_3 - x_1) \end{pmatrix} \\ &= (x_1 - x_0)(x_2 - x_0)(x_3 - x_0)(x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \\ &\quad \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & x_0^3 \\ 0 & 1 & x_0 + x_1 & x_0^2 + x_0x_1 + x_1^2 \\ 0 & 0 & 1 & x_2 - x_1 + x_0 \\ 0 & 0 & 1 & x_3 - x_1 + x_0 \end{pmatrix} \\ &= (x_1 - x_0)(x_2 - x_0)(x_3 - x_0)(x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \\ &\quad \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & x_0^3 \\ 0 & 1 & x_0 + x_1 & x_0^2 + x_0x_1 + x_1^2 \\ 0 & 0 & 1 & x_2 - x_1 + x_0 \\ 0 & 0 & 0 & x_3 - x_2 \end{pmatrix} \\ &= (x_1 - x_0)(x_2 - x_0)(x_3 - x_0)(x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2). \end{aligned}$$

(b) Für die n -reihige Vandermonde-Matrix gilt

$$\det(V_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

H64. Es gilt:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = 6, \quad \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix} = -8i,$$

$$\det \begin{pmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{pmatrix} = a^4 - 6a^2b^2 + 8ab^3 - 3b^4, \quad \det \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ b & a & b & 0 \\ 0 & b & a & b \\ 0 & 0 & b & a \end{pmatrix} = a^4 - 3a^2b^2 + b^4.$$

H65. Alle drei Aufgabenteile lassen sich mit Hilfe derselben Matrix lösen und unterscheiden sich nur durch Zeilenumtauschungen. Die Determinante der Matrizen ist dabei (bis auf ein Vorzeichen) $-(k^2 + 2k)$, somit ist diese genau dann verschieden von Null, wenn $k \notin \{0, -2\}$ ist.