TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Bereich Mathematik und Naturwissenschaften, Fakultät Mathematik, Institut für Algebra

Prof. Dr. Ulrike Baumann, Dr. Henri Mühle. Wintersemester 2019/20

11. Übungsblatt zur Vorlesung "Einführung in die Mathematik für Informatiker – Lineare Algebra"

Determinanten

Ü61. (a) Berechnen Sie die Determinanten der folgenden reellen Matrizen.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & -7 & 9 & 8 & -6 \\ 0 & 2 & -5 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Welche dieser Matrizen sind invertierbar?

Ü62. (a) Eine *Permutationsmatrix* ist eine Matrix $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$, für die in jeder Zeile und in jeder Spalte genau eine Eins und sonst nur Nullen stehen. Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass $\lvert\det(P)\rvert = 1$ gilt.

(b) Sei $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Matrix, für die $M = -M^T$ gilt. Berechnen Sie die Determinante von M, unter der Voraussetzung, dass n ungerade ist. Was kann über den Fall, dass n gerade ist, ausgesagt werden?

(c) Gibt es eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, sodass $AA^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ gilt?

Ü63. Die Matrix $V_4 = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & x_0^3 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 \end{pmatrix}$ heißt *(vierreihige) Vandermonde-Matrix*.

(a) Berechnen Sie die Determinante von V_4.

(b) Verallgemeinern Sie das Ergebnis von (a) auf die n-reihige Vandermonde-Matrix V_n.

A64. **Hausaufgabe, bitte vor Beginn der 12. Übung (oder im Lernraum) unter Angabe von Name, Matrikelnummer, Übungsgruppe und ÜbungsleiterIn abgeben.**
Gegeben sind die reellen Matrizen

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Determinante von A_1 mit dem Gauß-Verfahren.

(b) Bestimmen Sie die Determinante von A_2 mit dem Laplaceschen Entwicklungssatz.

H65. Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ b & a & b & 0 \\ 0 & b & a & b \\ 0 & 0 & b & a \end{pmatrix}.$$

H66. (a) Für welche $k \in \mathbb{R}$ ist die Determinante der Matrix $\begin{pmatrix} 0 & k & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & k \\ 2 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ von Null verschieden?

(b) Für welche $k \in \mathbb{R}$ ist die Menge

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ k \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ k \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^4$$

linear unabhängig?

(c) Für welche $k \in \mathbb{R}$ sind die reellen Polynome

$$\begin{aligned} p_1(x) &= -x^3 + x^2 + 2x, & p_2(x) &= 2x^3 + 3x^2 - x + k, \\ p_3(x) &= 2x^2 + x - 1, & p_4(x) &= x^3 + kx^2 - x + 2 \end{aligned}$$

linear unabhängig?