12. Kurzlösung zur Vorlesung "Einführung in die Mathematik für Informatiker – Lineare Algebra"

Eigenwerte und Eigenvektoren

Ü69. (a) Nach Definition ist das charakteristische Polynom gerade

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E).$$

Insbesondere folgt $\det(A) = \chi_A(0)$. Dementsprechend ist hier $\det(A) = -5$.

(b) Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, und sei $\chi_A(\lambda)$ das charakteristische Polynom von A. Es gilt

$$\begin{aligned} A \text{ invertierbar} &\iff \det(A) \neq 0 \\ &\iff \chi_A(0) \neq 0 \\ &\iff 0 \text{ ist kein Eigenwert von } A. \end{aligned}$$

(c) Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ mit Eigenwert λ und zugehörigem Eigenvektor $v \in \mathbb{K}^n$. Es gilt folglich $Av = \lambda v$. Dann gilt aber auch

$$A^2v = A(Av) = A(\lambda v) = \lambda Av = \lambda^2 v.$$

Also ist λ^2 ein Eigenwert von A^2 (mit Eigenvektor v).

H71. (a) Es gilt $\chi(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 13$, also sind die Eigenwerte $\lambda_1 = 2 + 3i$ und $\lambda_2 = 2 - 3i$.

Die Eigenvektoren zum Eigenwert $2 \pm 3i$ sind also

$$v_{1/2} = \begin{pmatrix} (1 \mp 3i)s \\ 2s \end{pmatrix} \text{ für } s \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

(b) Es gilt $\chi(\lambda) = \lambda^2 - 2a\lambda + a^2 + b^2$, und somit

$$\begin{aligned} \chi(a \pm ib) &= (a \pm ib)^2 - 2a(a \pm ib) + a^2 + b^2 \\ &= a^2 \pm 2abi - b^2 - 2a^2 \mp 2abi + a^2 + b^2 = 0. \end{aligned}$$

Also sind $a \pm ib$ die beiden Eigenwerte der gegebenen Matrix.

Für $b \neq 0$ sind die Eigenvektoren zum Eigenwert $a \pm ib$ also

$$v_{1/2} = \begin{pmatrix} s \\ \mp is \end{pmatrix} \text{ für } s \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

H72. (a) Es gilt $\det(A - \lambda E) = -\lambda(1-\lambda)^3$. Die Eigenwerte von A sind also $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 1$.

Die Eigenvektoren von A zum Eigenwert 0 sind

$$v_1 = \begin{pmatrix} s \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ für } s \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

und die Eigenvektoren von A zum (dreifachen) Eigenwert 1 sind

$$v = \begin{pmatrix} 0 \\ s \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t \\ 0 \end{pmatrix} \text{ für } s, t \in \mathbb{R}, \text{ außer } v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Der Eigenraum einer Matrix zu einem Eigenwert wird von den zugehörigen Eigenvektoren aufgespannt. Dementsprechend gilt $\dim \operatorname{Eig}_A(0) = 1$ und $\dim \operatorname{Eig}_A(1) = 2$.