TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Bereich Mathematik und Naturwissenschaften, Fakultät Mathematik, Institut für Algebra

Prof. Dr. Ulrike Baumann, Dr. Henri Mühle. Wintersemester 2019/20

12. Übungsblatt zur Vorlesung "Einführung in die Mathematik für Informatiker – Lineare Algebra"

Eigenwerte und Eigenvektoren

Ü67. (a) Bestimmen Sie die reellen Eigenwerte und Eigenvektoren der folgenden reellen Matrizen:

$$\text{(i)}\quad A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{(ii)}\quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{(iii)}\quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(b) Für welche Parameter $a, b \in \mathbb{R}$ besitzt die Matrix $A_{a,b} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & 2a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ zwei reelle, linear unabhängige Eigenvektoren?

Ü68. Betrachtet wird die Matrix $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 6 & 4 & 12 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

(i) A hat die Eigenwerte 1 und 2.

(ii) Der Eigenwert 1 hat die Vielfachheit 1.

(iii) Die Vektoren $(0, -4, 1)^T$ und $(-1, 2, 0)^T$ sind Eigenvektoren von A.

(iv) $(2, 6, -2)^T$ ist Eigenvektor zum Eigenwert 4 von A.

Ü69. (a) Sei A eine Matrix mit charakteristischem Polynom $-\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda - 5$. Bestimmen Sie die Determinante von A.

(b) Zeigen Sie, dass eine quadratische Matrix genau dann invertierbar ist, wenn 0 kein Eigenwert ist.

(c) Sei A eine quadratische Matrix mit Eigenwert λ. Zeigen Sie, dass A^2 den Eigenwert λ^2 besitzt.

A70. **Hausaufgabe, bitte vor Beginn der 13. Übung (oder im Lernraum) unter Angabe von Name, Matrikelnummer, Übungsgruppe und ÜbungsleiterIn abgeben.**

Für $a \in \mathbb{R}$ wird die Matrix $A_a = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ betrachtet.

(a) Berechnen Sie die (reellen) Eigenwerte von A_a in Abhängigkeit von a.

(b) Für welche Werte von a besitzt A_a drei reelle, linear unabhängige Eigenvektoren?

Hinweis: Lösen Sie (b) *ohne* die Eigenvektoren explizit zu berechnen.

H71. (a) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$.

(b) Für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $b \neq 0$ wird die Matrix $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ betrachtet. Zeigen Sie, dass diese Matrix die Eigenwerte $a \pm ib$ hat, und bestimmen Sie die Eigenvektoren.

H72. Betrachtet wird die reelle Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Berechnen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren von A.

(b) Bestimmen Sie die Dimensionen der zugehörigen Eigenräume.