TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Bereich Mathematik und Naturwissenschaften, Fakultät Mathematik, Institut für Algebra

Prof. Dr. Ulrike Baumann, Dr. Henri Mühle. Wintersemester 2019/20

13. Übungsblatt zur Vorlesung "Einführung in die Mathematik für Informatiker – Lineare Algebra"

Diagonalisierbarkeit, Skalarprodukte

Ü73. (a) Prüfen Sie ob die folgenden reellen Matrizen diagonalisierbar sind, und stellen Sie diese, falls möglich, in der Form SDS^{-1} mit einer invertierbaren Matrix S und einer Diagonalmatrix D dar:

$$\text{(i)}\quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \text{(ii)}\quad B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 9 & 4 & -3 \\ 9 & 6 & -5 \end{pmatrix}, \quad \text{(iii)}\quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Berechnen Sie B^{10} für die Matrix B aus (a).

Ü74. Betrachtet wird die Abbildung

$$\bullet\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (u,v) \mapsto u^T \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} v.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\bullet$ ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$ ist.

(b) Berechnen Sie die Länge der Vektoren $v_1 = (1,1)^T$ und $v_2 = (-2,2)^T$ in der zugehörigen Norm. Sind v_1 und v_2 orthogonal bzgl. $\bullet$?

Ü75. Sei V ein euklidischer $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Skalarprodukt $\bullet$ und zugehöriger Norm $\|\cdot\|$. Sei außerdem o_V der Nullvektor von V.

(a) Bestimmen Sie den Wert $\left\| \frac{w}{\|w\|} \right\|$ für $w \in V \setminus \{o_V\}$.

(b) Sei $V = \mathbb{R}^2$ und $\bullet$ das Standardskalarprodukt. Berechnen Sie die Ausdrücke $\|w - v\|$ und $v \bullet \frac{w}{\|w\|}$ für $v = (3,-1)^T$ und $w = (3,4)^T$.

(c) Sei $V = \mathbb{R}^3$ und $\bullet$ das Standardskalarprodukt. Für welche Parameter $a \in \mathbb{R}$ sind die Vektoren $(a,a,1)^T$ und $(a,5,6)$ zueinander orthogonal?

H76. Für $a \in \mathbb{R}$ wird die Matrix $A_a = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & a & 1 \\ -10 & 0 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ betrachtet.

(a) Bestimmen Sie die Dimension der Eigenräume von A_a in Abhängigkeit von a.

(b) Für welche Parameterwerte von a ist A_a diagonalisierbar?

H77. Sei V ein euklidischer $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Skalarprodukt $\bullet$ und zugehöriger Norm $\|\cdot\|$.

(a) Seien $u, v \in V$. Zeigen Sie, dass $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$ genau dann gilt, wenn $u \bullet v = 0$ ist.

(b) Seien $u, v \in V$. Zeigen Sie, dass $\|u-v\| = \|u+v\|$ gilt, wenn u und v orthogonal sind.

(c) Sei $V = \mathbb{R}^2$ und $\bullet$ das Standardskalarprodukt. Bestimmen Sie alle Vektoren $v \in \mathbb{R}^2$, die von $u = (1,1)^T$ den Abstand $\sqrt{2}$ haben und normiert sind. Fertigen Sie eine passende Skizze an.

H78. Betrachtet wird die Matrix $M = \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ 1 & 0 & -i \\ -i & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}$. Die Vektoren $v_1 = (i, -1, 1)^T$ und $v_2 = (i, 0, 1)^T$ sind Eigenvektoren von M.

(a) Welche Eigenwerte hat M, und welche Dimension haben die zugehörigen Eigenräume?

(b) Bilden die Eigenvektoren von M eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bzw. des $\mathbb{C}^3$?

(c) Welchen Wert hat die Determinante von M?

(d) Sind die Spaltenvektoren von M linear unabhängig? Welchen Rang hat M?

(e) Bestimmen Sie den Kern von M als Spannraum.

(f) Durch M ist eine lineare Abbildung $f\colon \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ mittels $f(v) = Mv$ festgelegt. Ist f injektiv?

(g) Ist M invertierbar?