



14. Kurzlösung zur Vorlesung
"Einführung in die Mathematik für Informatiker – Lineare Algebra"

Gram–Schmidt-Verfahren, Bestapproximation

H82. (a) Für $v \in V$ gilt

$$o_V \bullet v = (v - v) \bullet v = v \bullet v - v \bullet v = 0.$$

Sei nun $o_V = c_1 v_1 + c_2 v_2$. Es folgt

$$0 = o_V \bullet v_1 = (c_1 v_1 + c_2 v_2) \bullet v_1 = c_1(v_1 \bullet v_1) + c_2(v_2 \bullet v_1) = c_1(v_1 \bullet v_1).$$

Da $v_1 \neq o_V$ ist, ist $v_1 \bullet v_1 > 0$, also muss $c_1 = 0$ sein. Analog folgt $c_2 = 0$.
Damit ist $\{v_1, v_2\}$ linear unabhängig.

- (b) Sei $U \subseteq V$ ein Untervektorraum mit Orthogonalbasis $\{b_1, b_2, \dots, b_k\}$. Laut Vorlesung ist $U^\perp$ ein Untervektorraum und hat eine Basis $\{c_1, c_2, \dots, c_l\}$. Nach Definition gilt $b_i \bullet c_j = 0$ für alle $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ und $j \in \{1, 2, \dots, l\}$. Nach (a) ist $\{b_1, b_2, \dots, b_k, c_1, c_2, \dots, c_l\} \subseteq V$ linear unabhängig.

Sei $W = \text{Span}\{b_1, b_2, \dots, b_k, c_1, c_2, \dots, c_l\}$. Damit ist $\dim W = k + l$, und $W \subseteq V$. Wir wollen zeigen, dass tatsächlich $W = V$ gilt.

Also muss für ein beliebiges $v \in V$ gelten, dass $v \in W$ ist. Wenn $v \in U \subseteq W$ oder $v \in U^\perp \subseteq W$, sind wir bereits fertig. Andernfalls betrachten wir

$$\hat{v} = \text{proj}_U(v) = \sum_{i=1}^k \frac{v \bullet b_i}{b_i \bullet b_i} b_i \in U,$$

und setzen $w = v - \hat{v}$. Dann gilt aber für alle $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ wegen der Orthogonalitätseigenschaft der Basisvektoren von U bereits $w \bullet b_j = 0$. Also ist $w \in U^\perp$, und damit ist $v = \hat{v} + w \in W$. Es folgt $W = V$ und damit $\dim V = k + l = \dim U + \dim U^\perp$.

- (c) Wir setzen $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$. Wir stellen fest, dass $u_3 = 2u_1 + u_2$ gilt, also ist $\{u_1, u_2, u_3\}$ linear abhängig. Mit dem Gram–Schmidt-Verfahren erhalten wir

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wir sehen also, dass der dritte Vektor zum Nullvektor wird. Das ist ein allgemeines Prinzip, wenn der i -te Vektor linear abhängig von den ersten $i - 1$ Vektoren ist, dann produziert das Gram–Schmidt-Verfahren im i -ten Schritt den Nullvektor.

- H83. (a) Die Bestapproximation von v ist gerade $\hat{v} = \text{proj}_U(v)$. Da $u_1 \bullet u_2 = 0$ ist, können wir die bekannte Formel verwenden:

$$\hat{v} = \text{proj}_U(v) = \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

- (b) Mit (a) gilt

$$w = v - \hat{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \in U^\perp.$$

- (c) Der gesuchte Abstand ist gerade

$$\|v - \hat{v}\| = \|w\| = \sqrt{40} \approx 6.32.$$

- H84. (a) Da Addition und Skalarmultiplikation punktweise definiert sind, folgt die Bilinearität von $\bullet$ mit der Linearität des Integrals. Die Symmetrie folgt aus der Kommutativität der reellen Multiplikation. Für $p \in V$ ist offenbar $(p(x))^2 \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, und das Integral einer nicht-negativen Funktion ist stets nicht-negativ. Die einzige nicht-negative Funktion, deren Integral den Wert 0 annimmt, ist die Nullfunktion, also folgt die positive Definitheit.

Somit ist $\bullet$ ein Skalarprodukt auf V .

- (b) Es gilt

$$\begin{aligned} \|m_0\| &= \sqrt{\int_{-1}^1 1^2 dx} = \sqrt{\left[x\right]_{-1}^1} = \sqrt{2}, \\ \|m_1\| &= \sqrt{\int_{-1}^1 x^2 dx} = \sqrt{\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^1} = \sqrt{\frac{2}{3}}, \\ \|m_2\| &= \sqrt{\int_{-1}^1 x^4 dx} = \sqrt{\left[\frac{x^5}{5}\right]_{-1}^1} = \sqrt{\frac{2}{5}}. \end{aligned}$$

- (c) Mit dem Gram–Schmidt-Verfahren folgt

$$b_0 = 1, \quad b_1 = x, \quad b_2 = x^2 - \frac{1}{3}.$$

Eine Orthogonalbasis von V ist also $\left\{1, x, x^2 - \frac{1}{3}\right\}$.