TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

**Bereich Mathematik und Naturwissenschaften**, Fakultät Mathematik, Institut für Algebra

Prof. Dr. Ulrike Baumann, Dr. Henri Mühle. Wintersemester 2019/20

# 14. Übungsblatt zur Vorlesung "Einführung in die Mathematik für Informatiker – Lineare Algebra"

*Gram–Schmidt-Verfahren, Bestapproximation*

Ü79. Betrachtet wird der $\mathbb{R}^3$ mit dem Standardskalarprodukt.

(a) Berechnen Sie die orthogonale Projektion von $v = (1, -2, 3)^T$ auf den von $u = (1, 2, 2)^T$ aufgespannten Unterraum.

(b) Bestimmen Sie den Abstand des Punktes $(2; -2; 4)$ von derjenigen Geraden, die durch die Punkte $(1; 0; 1)$ und $(2; 2; 3)$ verläuft.

Ü80. Betrachtet wird der $\mathbb{R}^4$ mit dem Standardskalarprodukt und der (geordneten) Basis

$$B = \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Verwenden Sie das Gram–Schmidt-Verfahren um aus $B$ eine Orthogonalbasis des $\mathbb{R}^4$ zu konstruieren.

Ü81. Das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2}, \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 11 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

besitzt keine reelle Lösung. Gesucht ist der Vektor $\hat{x} \in \mathbb{R}^2$ für den, bzgl. der Standardnorm im $\mathbb{R}^2$, gilt:

$$\|b - A\hat{x}\| = \min_{x \in \mathbb{R}^2} \|b - Ax\|.$$

(a) Berechnen Sie $\hat{x}$ durch Bestapproximation.

(b) Berechnen Sie $\hat{x}$ durch Lösung der Normalgleichung.

H82. (a) Sei $V$ ein Vektorraum mit Skalarprodukt $\bullet$ und seien $v_1, v_2 \in V \setminus \{o_V\}$ orthogonale Vektoren. Zeigen Sie, dass $\{v_1, v_2\}$ linear unabhängig ist.

(b) Sei $V$ ein Vektorraum mit Skalarprodukt $\bullet$ und sei $U \subseteq V$ ein Untervektorraum mit zugehörigem Orthogonalraum $U^\perp$. Beweisen Sie, dass $\dim V = \dim U + \dim U^\perp$ gilt

(c) Wenden Sie das Gram–Schmidt-Verfahren auf folgende Menge an:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3.$$

Was fällt Ihnen auf?

H83. Betrachtet wird der $\mathbb{R}^3$ mit dem Standardskalarprodukt, sowie die Vektoren

$$v = \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad u_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

und der Unterraum $U = \operatorname{Span}\{u_1, u_2\}$.

(a) Bestimmen Sie die Bestapproximation von $v$ durch einen Vektor aus $U$.

(b) Zerlegen Sie $v$ in der Form $v = \hat{v} + w$ mit $\hat{v} \in U$ und $w \in U^\perp$.

(c) Wie groß ist der Abstand des Punktes $(5; -9; 5)$ zu der von $u_1$ und $u_2$ aufgespannten Ebene im $\mathbb{R}^3$?

H84. Es sei $V = \{a + bx + cx^2 \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum der reellen Polynomfunktionen vom Grad kleiner 3 bzgl. der üblichen Addition und Skalarmultiplikation. Für $k \in \{0, 1, 2\}$ sei $m_k = x^k \in V$.

(a) Zeigen Sie, dass die folgende Abbildung ein Skalarprodukt auf $V$ ist:

$$\bullet\colon V \times V \to \mathbb{R}, \quad (p, q) \mapsto \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\mathrm{d}x.$$

(b) Berechnen Sie die Länge von $m_0$, $m_1$, und $m_2$ in der zu $\bullet$ gehörigen Norm.

(c) Die (geordnete) Menge $(m_0, m_1, m_2)$ ist eine Basis von $V$. Verwenden Sie das Gram–Schmidt-Verfahren um eine Orthogonalbasis von $V$ zu konstruieren.