TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Bereich Mathematik und Naturwissenschaften, Fakultät Mathematik, Institut für Algebra

Prof. Dr. Ulrike Baumann, Dr. Henri Mühle. Wintersemester 2019/20

15. Kurzlösung zur Vorlesung "Einführung in die Mathematik für Informatiker – Lineare Algebra"

Orthogonale Abbildungen, Zusammenfassung

Ü85. (a) Mit dem Gauß–Jordan-Verfahren folgt

$$\left(\begin{array}{cccc|c|cccc} 2 & 0 & 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & a & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0\\ 0 & 1 & 0 & a & 1 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2-a & -3 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Also ist die Lösungsmenge des Gleichungssystems

$$L = \begin{cases} \emptyset, & \text{falls } a = 2,\\ \left\{\begin{pmatrix} 0\\ \frac{2a+2}{2-a}\\ 3\\ \frac{3}{a-2}\end{pmatrix}\right\}, & \text{falls } a \neq 2. \end{cases}$$

(b) Es gilt $\mathrm{Ker}\, f_a = \mathrm{Ker}\, A_a$ und $\mathrm{Im}\, f_a = \mathrm{Col}\, A_a$. Mit (a) folgt

$$\mathrm{Ker}\, f_a = \begin{cases} \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\left\{\begin{pmatrix} 0\\ -2\\ 0\\ 1\end{pmatrix}\right\}, & \text{falls } a = 2,\\ \left\{\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\right\}, & \text{falls } a \neq 2; \end{cases}$$

$$\mathrm{Im}\, f_a = \begin{cases} \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\left\{\begin{pmatrix} 2\\ 1\\ 3\\ 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\ 1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\ 0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}\right\}, & \text{falls } a = 2,\\ \mathbb{R}^4, & \text{falls } a \neq 2. \end{cases}$$

(c) Nach (b) ist f_a genau dann bijektiv, wenn $a \neq 2$ ist.

(d) Nach (a) gilt $\det A_a = 3a - 6$.

(e) Nach (d) ist A_a genau dann invertierbar, wenn $a \neq 2$ ist.

Die inverse Matrix lesen wir in dem Fall aus der letzten Zeile des Gauß–Jordan-Verfahrens aus (a) ab:

$$A_a^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{a}{2-a} & \frac{2}{2-a} & \frac{2a+2}{3a-6} & \frac{a}{a-2} \\ 1 & 0 & -\frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{a-2} & \frac{1}{a-2} & \frac{1}{2-a} & \frac{1}{2-a} \end{pmatrix}.$$

(f) Die Produkte $A_a v_1$ und $A_a v_2$ ergeben die beiden Eigenwerte $\lambda_1 = 3$ und $\lambda_2 = -1$. Seien λ_3 und λ_4 die übrigen beiden (möglicherweise komplexen) Eigenwerte. Dann gilt

$$\begin{aligned} \det A_a &= \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4, \\ \operatorname{Spur} A_a &= \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4. \end{aligned}$$

Wir erhalten also das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 3a - 6 &= -3\lambda_3 \lambda_4, \\ 5 &= 2 + \lambda_3 + \lambda_4. \end{aligned}$$

Die Lösungen dieses Gleichungssystems sind genau die Lösungen von $0 = \lambda_4^2 - 3\lambda_4 + 2 - a$; also

$$\begin{aligned} \lambda_4 &= \frac{3 \pm \sqrt{4a+1}}{2}, \\ \lambda_3 = 3 - \lambda_4 &= \frac{3 \mp \sqrt{4a+1}}{2}. \end{aligned}$$

Diese Eigenwerte sind allesamt reell, wenn $a \geq -\frac{1}{4}$ ist.

(g) Da wir die Diagonalisierbarkeit von A_a nur über $\mathbb{R}$ untersuchen wollen, müssen alle Eigenwerte reell sein, was nach (f) voraussetzt, dass $a \geq -\frac{1}{4}$ ist.

Es gibt nur in folgenden Fällen mehrfache Eigenwerte: $a = -\frac{1}{4}$ ($\lambda_3 = \lambda_4 = \frac{3}{2}$); $a = 2$ ($\lambda_1 = \lambda_3 = 3$); $a = 6$ ($\lambda_2 = \lambda_4 = -1$). Die jeweiligen Eigenräume sind

$$\begin{aligned} \operatorname{Eig}_{A_{-\frac{1}{4}}}\left(\frac{3}{2}\right) &= \operatorname{Span}_{\mathbb{R}} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}, \\ \operatorname{Eig}_{A_2}(3) &= \operatorname{Span}_{\mathbb{R}} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \end{aligned}$$

$$\mathrm{Eig}_{A_6}(-1) = \mathrm{Span}_{\mathbb{R}} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Also ist A_a genau dann diagonalisierbar, wenn $a \in \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x > -\frac{1}{4} \right\} \setminus \{2, 6\}$ ist.

(h) Nach (g) ist A_0 diagonalisierbar, und nach (f) sind die Eigenwerte von A_0 gerade $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 2$, $\lambda_4 = 1$. Die zugehörigen Eigenvektoren sind ebenfalls nach (f) $v_1 = (2, 1, 2, 3)^T$, $v_2 = (6, -3, -18, 7)^T$, $v_3 = (0, 0, 0, 1)^T$ und $v_4 = (0, 1, 0, -1)^T$. Wir setzen

$$S = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 1 \\ 2 & -18 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

und erhalten

$$S^{-1} = \frac{1}{24} \begin{pmatrix} 9 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -40 & 24 & -8 & 24 \\ -6 & 24 & -6 & 0 \end{pmatrix},$$

sodass $A_0 = S \cdot DS^{-1}$ gilt. Also ist

$$24 \cdot A_0^5 = S \cdot D^5 \cdot \left(24 \cdot S^{-1}\right) = \begin{pmatrix} 4368 & 0 & 1464 & 0 \\ 2184 & 24 & 720 & 0 \\ 4392 & 0 & 1440 & 0 \\ 5280 & 744 & 1944 & 768 \end{pmatrix}.$$

(i) Nach (a) ist $v \notin \mathrm{Col}\ A_2$, und $\mathrm{Col}\ A_2$ besitzt zum Beispiel die Basis $\{v_1, v_2, v_3\}$ mit

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Mit dem Gram–Schmidt-Verfahren konstruieren wir uns daraus eine Orthogonalbasis $\{b_1, b_2, b_3\}$ mit

$$b_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 13 \\ -3 \\ 14 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Der Abstand von v zu $\mathrm{Col}\ A_2$ ist dann

$$\left\| v - \mathrm{proj}_{\mathrm{Col}\ A_2}(v) \right\| = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}.$$

(j) Wir verwenden die Normalengleichung, und müssen also nur $A_2^T A_2 x = A_2^T v$ lösen. Es gilt

$$A_2^T A_2 = \begin{pmatrix} 14 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A_2^T v = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix};$$

also folgt

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 14 & 1 & 2 & 2 & 7 \\ 1 & 2 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 2 & 8 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 28 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Folglich wird die geforderte Bedingung von jedem Vektor erfüllt, der auf der Geraden

$$\left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ 0 \\ \frac{7}{4} \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, s \in \mathbb{R} \right\}$$

liegt. Unter all diesen Vektoren suchen wir den mit der kürzesten Länge; müssen also das globale Minimum von

$$g(s) = \left\| \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ -2s \\ \frac{7}{4} \\ s \end{pmatrix} \right\| = \frac{\sqrt{20s^2 + 50}}{2}$$

bestimmen. Das liegt offenbar bei $s = 0$. Der gesuchte Vektor ist also $\hat{x} = (\frac{1}{4}, 0, \frac{7}{4}, 0)^T$.

H86. (a) Damit w orthogonal zu v_1, v_2, v_3 ist, muss gelten $v_1 \bullet w = v_2 \bullet w = v_3 \bullet w = 0$. Da das Standardskalarpodukt als $v \bullet w = v^T w$ definiert ist, bleibt also das folgende homogene Gleichungssystem zu lösen:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -4 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 6 & 4 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Also kommen für w nur Vielfache von $(-6, 8, -1, 2)^T$ in Frage. Da w normiert sein soll, also $\|w\| = 1$ gelten soll, folgt die Bedingung:

$$1 = \left\| \begin{pmatrix} -6s \\ 8s \\ -s \\ 2s \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{105s^2}.$$

Die möglichen Lösungsvektoren sind also

$$w = \pm \frac{1}{\sqrt{105}} \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(b) Sei $U = \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\{v_1, v_2, v_3\}$. Dann ist $U^\perp$ gerade die Lösung des in (a) betrachteten Gleichungssystems, also:

$$U^\perp = \mathrm{Span}_{\mathbb{R}} \left\{ \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

H87. (a) Es gilt

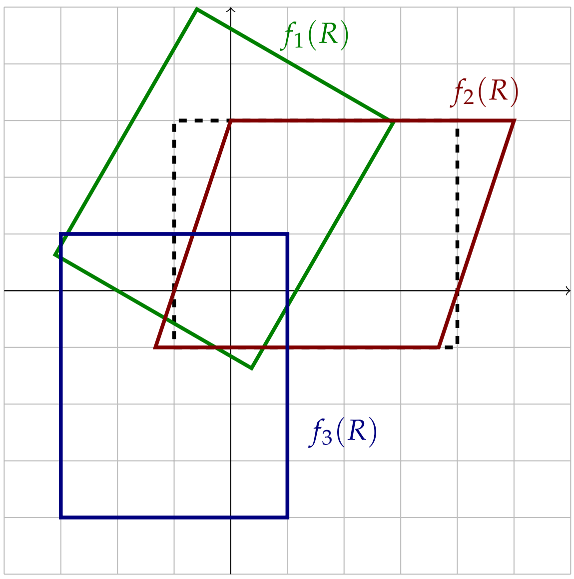
$$A_1 A_1^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 A_2^T = \begin{pmatrix} \frac{10}{9} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 A_3^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Also sind nur f_1 und f_3 orthogonal.

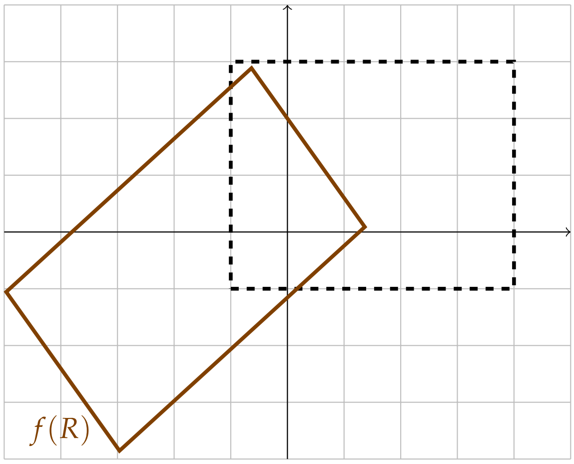
(b) Die Eckpunkte von R unter f_i sind in der folgenden Tabelle dargestellt:

v	$f_1(v)$	$f_2(v)$	$f_3(v)$
$(-1,-1)^T$	$(\frac{\sqrt{3}-1}{2}, \frac{-\sqrt{3}-1}{2})^T$	$(-\frac{4}{3}, -1)^T$	$(1,1)^T$
$(3,-1)^T$	$(\frac{\sqrt{3}+4}{2}, \frac{4\sqrt{3}-1}{2})^T$	$(\frac{11}{3}, -1)^T$	$(1,-4)^T$
$(3,3)^T$	$(\frac{-3\sqrt{3}+4}{2}, \frac{4\sqrt{3}+3}{2})^T$	$(5,3)^T$	$(-3,-4)^T$
$(-1,3)^T$	$(\frac{-3\sqrt{3}-1}{2}, \frac{-\sqrt{3}+3}{2})^T$	$(0,3)^T$	$(-3,1)^T$

Die Bilder von R sind in der folgenden Grafik skizziert.



(c) Nach (b) führt f zunächst eine Drehung um $60°$ gegen den Uhrzeigersinn, anschließend eine Scherung entlang der x-Achse um $18.43°$, und zum Schluss eine Spiegelung an der Achse $x = -y$. Die folgende Grafik zeigt $f(R)$.



H88. (a) Es gilt

$$\begin{aligned}\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) &= \det\big((A - \lambda E)^T\big)\\ &= \det\big(A^T - (\lambda E)^T\big) = \det(A^T - \lambda E) = \chi_{A^T}(\lambda).\end{aligned}$$

Also haben $\chi_A(\lambda)$ und $\chi_{A^T}(\lambda)$ dieselben Nullstellen, und damit haben A und A^T dieselben Eigenwerte.

(b) Sei v ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ. Für $n \geq 1$, betrachten wir die Aussage

$$H_n: \quad v \text{ ist Eigenvektor von } A^n \text{ zum Eigenwert } \lambda^n.$$

Der Induktionsanfang H_1 gilt nach Voraussetzung. Im Induktionsschritt ist die Implikation $H_n \Rightarrow H_{n+1}$ zu zeigen. Wir nehmen also an, dass H_n gilt. Das bedeutet, dass $A^n v = \lambda^n v$ gilt. Es folgt

$$A^{n+1}v = A(A^n v) = A(\lambda^n v) = \lambda^n(Av) = \lambda^n(\lambda v) = \lambda^{n+1}v.$$

Das ist aber gerade H_{n+1}.