TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DRESDEN

Bereich Mathematik und Naturwissenschaften, Fakultät Mathematik, Institut für Algebra

Prof. Dr. Ulrike Baumann, Dr. Henri Mühle. Wintersemester 2019/20

15. Übungsblatt zur Vorlesung "Einführung in die Mathematik für Informatiker – Lineare Algebra"

Orthogonale Abbildungen, Zusammenfassung

Ü85. *Diese Aufgabe soll der Zusammenfassung eines Großteils der Lerninhalte dieses Semesters dienen, und in den Übungen interaktiv mit den TutorInnen besprochen werden. Bereiten Sie diese Aufgabe daher weitestgehend selbstständig vor. Bringen Sie in jedem Fall Ihre Vorlesungs- und Übungsunterlagen mit.*

Betrachtet werden für $a \in \mathbb{R}$:

$$A_a = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & a \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4} \quad \text{und} \quad v = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4.$$

(a) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $A_a x = v$ in Abhängigkeit von a.

(b) Berechnen Sie Kern und Bild der linearen Abbildung

$$f_a\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4, \quad x \mapsto A_a x.$$

(c) Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist die Abbildung f_a injektiv, surjektiv oder gar bijektiv?

(d) Berechnen Sie die Determinante von A_a.

(e) Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist A_a invertierbar? Berechnen Sie gegebenenfalls die inverse Matrix A_a^{-1}.

(f) Die Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 2-a \\ 1+a \\ 2-a \\ 3 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} 6-a \\ -3-3a \\ -18+3a \\ 7 \end{pmatrix}$ sind Eigenvektoren von A_a. Berechnen Sie alle reellen Eigenwerte von A_a in Abhängigkeit von a.

(g) Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist A_a über $\mathbb{R}$ diagonalisierbar?

(h) Berechnen Sie $24 \cdot A_0^5$ indem Sie A_0 diagonalisieren.

(i) Berechnen Sie den Abstand (bzgl. des Standardskalarpoduktes) zwischen v und dem Spaltenraum von A_2.

(j) Finden Sie den kürzesten Vektor $\hat{x} \in \mathbb{R}^4$, für den $\|v - A_2\hat{x}\|$ so klein wie möglich ist.

H86. Gegeben sind die folgenden Vektoren im $\mathbb{R}^4$:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

(a) Finden Sie einen normierten Vektor $w \in \mathbb{R}^4$, der zu den Vektoren v_1, v_2, v_3 orthogonal (bzgl. des Standardskalarpoduktes) ist.

(b) Berechnen Sie das orthogonale Komplement $U^\perp$ von $U = \operatorname{Span}\{v_1, v_2, v_3\}$.

H87. Betrachtet werden die reellen Matrizen

$$A_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Für $i \in \{1, 2, 3\}$ sei $f_i \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch $f_i(x) = A_i x$.

(a) Prüfen Sie, welche dieser Abbildungen orthogonal sind.

(b) Die reellen Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

können als Eckpunkte eines Rechtecks R aufgefasst werden. Bestimmen Sie die Bildmengen $f_i(R)$ für $i \in \{1, 2, 3\}$.

(c) Schlussfolgern Sie die geometrische Wirkung der Abbildung $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, die durch $f(x) = A_3 A_2 A_1(x)$ gegeben ist.

H88. Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$.

(a) Zeigen Sie, dass A und A^T dieselben Eigenwerte haben.

(b) Sei v ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ und sei $n \geq 1$. Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass v auch ein Eigenvektor von A^n zum Eigenwert λ^n ist.