TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Bereich Mathematik und Naturwissenschaften, Fakultät Mathematik, Institut für Algebra

Prof. Dr. Ulrike Baumann, Dr. Henri Mühle. Wintersemester 2019/20

1. Übungsblatt zur Vorlesung "Einführung in die Mathematik für Informatiker – Lineare Algebra"

Komplexe Zahlen

Ü1. (a) Sei $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$. Stellen Sie z in der Gaußschen Zahlenebene dar, und notieren Sie die Formeln zur Umrechnung der Darstellungen $z = a + bi$ und $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

(b) Bestimmen Sie die Polarkoordinaten und die Exponentialform der folgenden komplexen Zahlen:

$$\text{(i)} \quad 1 - \sqrt{3}i, \quad \text{(ii)} \quad -1 + \sqrt{3}i, \quad \text{(iii)} \quad -1 - \sqrt{3}i, \quad \text{(iv)} \quad 1 + \sqrt{3}i.$$

(c) Bestimmen Sie die kartesischen Koordinaten der folgenden komplexen Zahlen:

$$\text{(i)} \quad \sqrt{2}e^{\frac{\pi i}{4}}, \quad \text{(ii)} \quad \sqrt{3}e^{\frac{-\pi i}{3}}.$$

Ü2. Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil der folgenden komplexen Zahlen.

$$\text{(i)} \quad (4+i)+(3-2i), \quad \text{(ii)} \quad (4+i)(3-2i), \quad \text{(iii)} \quad \frac{2+3i}{3+4i},$$
$$\text{(iv)} \quad \frac{(2i+1)(i-2)+1}{(2-i)^2-2+i}, \quad \text{(v)} \quad \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{10}, \quad \text{(vi)} \quad (1-i)^8.$$

Ü3. (a) Sei $z = -2 - i$. Veranschaulichen Sie sich die Lage von z, $\overline{z}$, z^2, $ze^{\frac{3\pi i}{2}}$ in der Gaußschen Zahlenebene.

(b) Wo liegen in der Gaußschen Zahlenebene alle komplexen Zahlen z, die folgende Bedingungen erfüllen?

$$\text{(i)} \quad |z| = 2, \quad \text{(ii)} \quad \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Im}(z), \quad \text{(iii)} \quad |z+4-i| \leq 1.$$

A4. **Hausaufgabe, bitte vor Beginn der 2. Übung (oder im Lernraum) unter Angabe von Name, Matrikelnummer, Übungsgruppe und ÜbungsleiterIn abgeben.**
Es seien $z_1 = 4e^{\frac{2\pi i}{5}}$ und $z_2 = 2e^{\frac{3\pi i}{4}}$.

a) Bestimmen Sie die kartesischen Koordinaten von z_1 und z_2, und skizzieren Sie diese Zahlen in der Gaußschen Zahlenebene.

b) Bestimmen Sie die Polarkoordinaten von $z_1 \cdot z_2$ und $\frac{z_1}{z_2}$.

H5. (a) Berechnen Sie alle Summen von jeweils zwei komplexen Zahlen aus der Menge

$$\left\{\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{1+i}, \frac{1+i}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}e^{\frac{\pi i}{2}}\right\}.$$

Geben Sie jeweils Real- und Imaginärteil, sowie Betrag und Argument der Summen an.

(b) Berechnen Sie alle Produkte von jeweils zwei komplexen Zahlen aus der Menge

$$\left\{2, 1+i, \frac{1}{1-i}, e^{\frac{\pi i}{2}}\right\}.$$

Geben Sie jeweils Real- und Imaginärteil, sowie Betrag und Argument der Produkte an.

H6. (a) Bestimmen Sie Polarkoordinaten und Exponentialform der folgenden komplexen Zahlen:

$$\text{(i)} \quad -3+4i, \quad \text{(ii)} \quad \sqrt{5+\sqrt{5}}+i\left(\sqrt{\frac{5}{2}}-\sqrt{\frac{1}{2}}\right), \quad \text{(iii)} \quad -\sqrt{3}-3i.$$

(b) Bestimmen Sie die kartesischen Koordinaten der folgenden komplexen Zahlen:

$$\text{(i)} \quad 4e^{\frac{6\pi i}{5}}, \quad \text{(ii)} \quad \sqrt{8}e^{\frac{7\pi i}{12}}, \quad \text{(iii)} \quad \cos\left(\frac{5\pi}{9}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{9}\right).$$