

2. Kurzlösung zur Vorlesung
“Einführung in die Mathematik für Informatiker – Lineare Algebra”

Lösen von (Un-)Gleichungen in \mathbb{C}

Ü9. (a) Seien $z_1 = a_1 + ib_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$ und $z_2 = a_2 + ib_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$.

(i)

$$\begin{aligned}\overline{z_1 + z_2} &= \overline{(a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2)} \\ &= \overline{(a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)} \\ &= (a_1 + a_2) - i(b_1 + b_2) \\ &= (a_1 - ib_1) + (a_2 - ib_2) \\ &= \overline{z}_1 + \overline{z}_2.\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}\overline{z_1 \cdot z_2} &= r_1 r_2 e^{-i(\varphi_1 + \varphi_2)} \\ &= r_1 r_2 e^{-i\varphi_1 - i\varphi_2} \\ &= r_1 e^{-i\varphi_1} \cdot r_2 e^{-i\varphi_2} \\ &= \overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2.\end{aligned}$$

(iii)

$$|z_1 \cdot z_2| = r_1 \cdot r_2 = |z_1| \cdot |z_2|.$$

(b) Sei $z_0 = a + ib$ eine Lösung von $z^3 + pz + q = 0$. Dann gilt insbesondere

$$\begin{aligned}0 &= (a + ib)^3 + p(a + ib) + q \\ &= a^3 - 3ab^2 + pa + q + i(3a^2b - b^3 + pb).\end{aligned}$$

Es ist $\overline{z}_0 = a - ib$, und damit folgt

$$\begin{aligned}(a - ib)^3 + p(a - ib) + q &= a^3 - 3ab^2 + pa + q - i(3a^2b - b^3 + pb) \\ &= a^3 - 3ab^2 + pa + q + i(3a^2b - b^3 + pb) \\ &= \overline{0} \\ &= 0.\end{aligned}$$

H11. (a) Sei $z = a + ib$. Dann ist $\bar{z} = a - ib$ und es gilt

$$\operatorname{Re}(\bar{z}^{-1}) = \frac{a}{a^2 + b^2}, \quad \text{und} \quad \operatorname{Im}(\bar{z}^{-1}) = \frac{b}{a^2 + b^2},$$

sowie

$$\operatorname{Re}(\overline{z^{-1}}) = \frac{a}{a^2 + b^2}, \quad \text{und} \quad \operatorname{Im}(\overline{z^{-1}}) = \frac{b}{a^2 + b^2}.$$

(b)

$$\frac{(1+2i)(2-3i)}{(3+2i)(2-i)} = \frac{2-3i+4i-6i^2}{6-3i+4i-2i^2} = \frac{8+i}{8+i} = 1.$$

(c) Es gilt

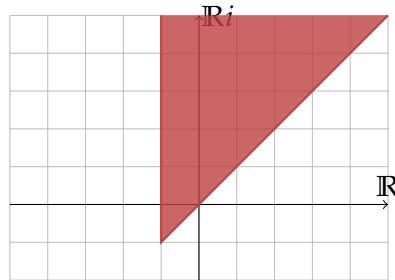
$$(x+2-i)^4 = (x+2)^4 - 6(x+2)^2 + 1 + i(4(x+2)^3 - 4(x+2))$$

In dem Ausdruck soll der Imaginärteil gleich null sein, und das ist für die folgenden Werte erfüllt:

$$x_0 = -2, \quad x_1 = -1, \quad x_2 = -3.$$

(d) Die Lösungsmenge ist

$$\left\{ z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) \leq \operatorname{Im}(z) \text{ und } \operatorname{Re}(z) \geq -1 \right\}.$$



H12. (a)

$$(i) \quad z_0 = 1, \quad z_1 = e^{\frac{2\pi i}{3}}, \quad z_2 = e^{\frac{4\pi i}{3}}$$

$$(ii) \quad z_0 = -1, \quad z_1 = e^{\frac{5\pi i}{3}}, \quad z_2 = e^{\frac{\pi i}{3}}$$

$$(iii) \quad z_0 = 1, \quad z_1 = 2e^{\frac{2\pi i}{5}} - 1, \quad z_2 = 2e^{\frac{4\pi i}{5}} - 1, \quad z_3 = 2e^{\frac{6\pi i}{5}} - 1, \\ z_4 = 2e^{\frac{8\pi i}{5}} - 1$$

$$(iv) \quad z_1 = i\sqrt{1 - \frac{2}{\sqrt{5}}}, \quad z_2 = -i\sqrt{1 - \frac{2}{\sqrt{5}}}, \quad z_3 = i\sqrt{1 + \frac{2}{\sqrt{5}}}, \\ z_4 = -i\sqrt{1 + \frac{2}{\sqrt{5}}}$$

(b)

$$z_0 = 0, \quad z_1 = 1 + 5i, \quad z_2 = -4 + 6i, \quad z_3 = -5 + i$$