TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Bereich Mathematik und Naturwissenschaften, Fakultät Mathematik, Institut für Algebra

Prof. Dr. Ulrike Baumann, Dr. Henri Mühle. Wintersemester 2019/20

2. Übungsblatt zur Vorlesung "Einführung in die Mathematik für Informatiker – Lineare Algebra"

Lösen von (Un-)Gleichungen in $\mathbb{C}$

Ü7. Berechnen Sie alle komplexen Lösungen der folgenden Gleichungen, und stellen Sie diese Lösungen in der Gaußschen Zahlenebene dar:

$$\text{(i)}\quad z^5 = 1 - i, \quad \text{(ii)}\quad z^4 = 4, \quad \text{(iii)}\quad z^4 + 8z^2 - 9 = 0, \quad \text{(iv)}\quad (z - 3i)^6 + 64 = 0.$$

Ü8. (a) Es sei $r \in \mathbb{R}$ mit $r > 0$. Beschreiben Sie die Lage aller $z \in \mathbb{C}$ in der Gaußschen Zahlenebene, für die $|z + 4| = r$ gilt.

(b) Berechnen Sie alle $z \in \mathbb{C}$, die die folgenden Beziehungen erfüllen:

$$\text{(i)}\quad |z + 4| \leq |z - 2i|, \quad \text{(ii)}\quad |z| + 2\overline{z} = -3 + 6i, \quad \text{(iii)}\quad |z + i| \leq |2z + \overline{z}|.$$

Skizzieren Sie jeweils die Lösungsmengen in der Gaußschen Zahlenebene.

Ü9. (a) Zeigen Sie, dass für alle komplexen Zahlen $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ die folgenden Beziehungen gelten:

$$\text{(i)}\quad \overline{z_1 + z_2} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2, \quad \text{(ii)}\quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2, \quad \text{(iii)}\quad |z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|.$$

(b) Für $p, q \in \mathbb{R}$ wird die Gleichung $z^3 + pz + q = 0$ betrachtet. Zeigen Sie, dass zu jeder Lösung $z_0 \in \mathbb{C}$ dieser Gleichung auch $\overline{z}_0$ eine Lösung ist.

A10. **Hausaufgabe, bitte vor Beginn der 3. Übung (oder im Lernraum) unter Angabe von Name, Matrikelnummer, Übungsgruppe und ÜbungsleiterIn abgeben.**

(a) Berechnen Sie alle komplexen Lösungen der Gleichung $z^4 = 2\sqrt{3} - 2i$.

(b) Berechnen Sie alle $z \in \mathbb{C}$, die die Ungleichung $\frac{|z|}{|z-2|} < 1$ erfüllen, und stellen Sie die Lösungsmenge in der Gaußschen Zahlenebene dar.

H11. (a) Bestimmen Sie für $z \in \mathbb{C}$ die kartesischen Koordinaten von $\overline{z}^{-1}$ und $\overline{z^{-1}}$.

(b) Zeigen Sie, dass die Gleichung $\frac{(1+2i)(2-3i)}{(3+2i)(2-i)} = 1$ gilt.

(c) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, sodass $(x + 2 - i)^4$ wieder reell ist.

(d) Stellen Sie die folgende Menge in der Gaußschen Zahlenebene dar:

$$\left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; \frac{|z-1|}{|z+3|} \leq 1 \text{ und } \operatorname{Im}(z) \geq \operatorname{Re}(z) \right\}.$$

H12. (a) Berechnen Sie alle komplexen Lösungen der folgenden Gleichungen:

(i) $z^3 - 1 = 0$, (ii) $z^3 + 1 = 0$,

(iii) $(z+1)^5 = 32$, (iv) $(z+1)^5 = (z-1)^5$.

(b) Für $a \in \mathbb{C}$ wird die Gleichung $(z + 2 - 3i)^4 = a$ betrachtet. Ermitteln Sie alle komplexen Lösungen dieser Gleichung mit Hilfe der vorgegebenen Lösung $z_0 = 0$.