3. Übungsblatt zur Vorlesung "Einführung in die Mathematik für Informatiker – Lineare Algebra"

Matrizen, Lineare Gleichungssysteme

Ü13. (a) Gegeben sind die folgenden reellen Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie, falls möglich, die Matrizenausdrücke

$$2A - B, \quad B + C, \quad AB, \quad BA, \quad CA, \quad C^T A, \quad B^2, \quad C^T C, \quad CC^T.$$

(b) Beweisen oder widerlegen Sie die folgende Behauptung:

Für alle $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gilt: $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

Ü14. Bestimmen Sie alle Paare $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$, die Lösungen der folgenden linearen Gleichungssysteme sind.

(i)
$$\begin{aligned} (2-i)z_1 + 2iz_2 &= i \\ (1-4i)z_1 + 2iz_2 &= 0 \end{aligned}$$

(ii)
$$\begin{aligned} (2+3i)z_1 \phantom{{}+4z_2} &= 7+4i \\ (1-i)z_1 + 4z_2 &= 5-3i \end{aligned}$$

Ü15. (a) Schreiben Sie für die folgenden linearen Gleichungssysteme die Koeffizientenmatrix auf.

(i)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 4x_3 &= 4 \\ 2x_1 \phantom{{}+2x_2} + x_3 &= 2 \end{aligned}$$

(ii)
$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + x_3 &= 10 \\ x_2 - x_3 &= -4 \\ x_1 + 2x_2 \phantom{{}-3x_3} &= 0 \\ x_1 - x_2 - 3x_3 &= -6 \end{aligned}$$

Geben Sie beide Systeme sowohl in Matrixschreibweise, als auch als Summe der Spalten der Koeffizientenmatrix an.

(b) Modellieren Sie das folgende Problem mit einem linearen Gleichungssystem. Bestimmen Sie die Koeffizientenmatrix, und geben Sie das System in Matrixschreibweise an. Lösen Sie das Problem.

Die Summe der Ziffern einer zweistelligen, natürlichen Zahl beträgt sieben. Wenn man die beiden Ziffern vertauscht, erhöht sich die Zahl um 27. Welche Zahl ist gesucht?

A16. **Hausaufgabe, bitte vor Beginn der 4. Übung (oder im Lernraum) unter Angabe von Name, Matrikelnummer, Übungsgruppe und ÜbungsleiterIn abgeben.**

(a) Gegeben sind die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -a & a \\ 0 & a & -a \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ b \\ -2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -c \\ c & 0 \end{pmatrix}.$$

mit Parametern $a, b, c \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie, falls möglich, die Matrixprodukte

$$AB, \quad B^T A^T, \quad AC, \quad CA, \quad B^T B, \quad BB^T, \quad C^2.$$

(b) Bestimmen Sie alle Paare $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$, die Lösungen des folgenden linearen Gleichungssystems sind.

$$\begin{array}{rcrcr} (1+i)z_1 & - & z_2 & = & 2i-1 \\ (1-i)z_1 & + & (1+i)z_2 & = & i+3 \end{array}$$

H17. (a) Betrachtet wird die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

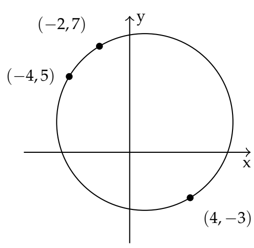
Finden Sie alle Parameter $a, b \in \mathbb{R}$, die die folgende Gleichung erfüllen:

$$A^3 = aA^2 + bA.$$

(b) Man kann einen Kreis in der (x, y)-Ebene durch eine Gleichung der Form

$$(x^2 + y^2) + ax + by + c = 0,$$

für geeignete reelle Zahlen a, b, c, darstellen. Stellen Sie ein lineares Gleichungssystem auf, mit dem sich die Gleichung des dargestellten Kreises bestimmen lässt.



H18. (a) Modellieren Sie das folgende Problem mit einem linearen Gleichungssystem. Bestimmen Sie die Koeffizientenmatrix, und geben Sie das System in Matrixschreibweise an.

> In einem Baukasten befinden sich 45 Steine in drei verschiedenen Farben. Die Zahl der roten Bausteine ist doppelt so groß wie die Zahl der grünen und blauen Bausteine zusammen. Es gibt drei blaue Steine weniger als grüne.

(b) Im Brettspiel "Die Siedler von Catan" gibt es fünf verschiedene Rohstoffe (Lehm, Holz, Wolle, Getreide und Erz), sowie vier Spielelemente (Straße, Siedlung, Stadt, und Entwicklung). Die folgende Tabelle beschreibt wie viele Rohstoffe nötig sind um je ein Spielelement herzustellen.

	Straße	Siedlung	Stadt	Entwicklung
Lehm	1	1	0	0
Holz	1	1	0	0
Wolle	0	1	0	1
Getreide	0	1	2	1
Erz	0	0	3	1

Stellen Sie den Zusammenhang zwischen Rohstoffen und Spielelementen mit einem geeigneten linearen Gleichungssystem dar.