TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Bereich Mathematik und Naturwissenschaften, Fakultät Mathematik, Institut für Algebra

Prof. Dr. Ulrike Baumann, Dr. Henri Mühle. Wintersemester 2019/20

4. Kurzlösung zur Vorlesung "Einführung in die Mathematik für Informatiker – Lineare Algebra"

Gauß–Jordan-Verfahren

H23. (a) Es gilt

$$\begin{pmatrix} 1 & a & | & 1 \\ 2 & 3 & | & b \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathrm{II} \mapsto \mathrm{II} - 2\mathrm{I}} \begin{pmatrix} 1 & a & | & 1 \\ 0 & 3-2a & | & b-2 \end{pmatrix}.$$

Also hat das System

- keine Lösung, falls $a = \frac{3}{2}$ und $b \neq 2$,
- genau eine Lösung, falls $a \neq \frac{3}{2}$,
- unendlich viele Lösungen, falls $a = \frac{3}{2}$ und $b = 2$.

(b) Mit dem Gauß–Jordan-Verfahren kann man die erweiterte Koeffizientenmatrix auf die folgende Form bringen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}.$$

Es gilt also $x_1 = x_5 + x_6 + x_7$, $x_2 = x_4 + x_5 + x_7$, und $x_3 = x_4 + x_5 + x_6$. Die Lösungsmenge ist demnach

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} b+c+d \\ a+b+d \\ a+b+c \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b, c, d \in \mathrm{GF}(2) \right\}.$$

Damit gilt auch $|L| = 2^4 = 16$.

H24. (a) Die reduzierte Zeilenstufenform des Gleichungssystems aus H17(b) ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -2 \\ 0 & 1 & 0 & | & -4 \\ 0 & 0 & 1 & | & -29 \end{pmatrix}.$$

Die gesuchte Kreisgleichung aus H17(b) lautet also

$$0 = (x^2 + y^2) - 2x - 4y - 29 = (x-1)^2 + (y-2)^2 - 34.$$

Die reduzierte Zeilenstufenform des Gleichungssystems aus H18(a) ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 30 \\ 0 & 1 & 0 & | & 9 \\ 0 & 0 & 1 & | & 6 \end{pmatrix}$$

Es gibt also 30 rote, 9 grüne und 6 blaue Bausteine.

(b) Mit dem Gauß–Jordan-Verfahren erhält man folgende reduzierte Zeilenstufenform:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 12i-3 & | & 1-4i \\ 0 & 1 & 6i-1 & | & -i \end{pmatrix}$$

Es gilt also $x_1 = 1 - 4i + (3-12i)x_3$, $x_2 = -i + (1-6i)x_3$. Die Lösungsmenge ist demnach

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} 1-4i \\ -i \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3-12i \\ 1-6i \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; t \in \mathbb{C} \right\}.$$