TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Bereich Mathematik und Naturwissenschaften, Fakultät Mathematik, Institut für Algebra

Prof. Dr. Ulrike Baumann, Dr. Henri Mühle. Wintersemester 2019/20

4. Übungsblatt zur Vorlesung "Einführung in die Mathematik für Informatiker – Lineare Algebra"

Gauß–Jordan-Verfahren

Ü19. Es seien $A \in \mathbb{R}^{k\times m}$ und $B, C \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

(a) Wenn die ersten beiden Spalten von B gleich sind, was lässt sich dann über AB aussagen? Begründen Sie!

(b) Beweisen Sie das Distributivgesetz

$$A(B+C) = AB + AC.$$

Ü20. (a) Betrachtet wird die folgende obere Dreiecksmatrix über GF(2):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie A^2, A^3, A^4, A^5 und A^{2019}.

(b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden linearen Gleichungssysteme über GF(2).

(i)
$$\begin{aligned} x_1 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned}$$

(ii)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 0 \\ x_2 + x_3 &= 1 \\ x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 + x_4 &= 1 \end{aligned}$$

Ü21. (a) Es seien $a, b \in \mathbb{R}$. Lösen Sie die folgenden linearen Gleichungssysteme über $\mathbb{R}$ mit dem Gauß–Jordan-Verfahren.

(i)
$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 8 \\ 2x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & = & 0 \end{array}$$

(ii)
$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & = & -4 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & ax_3 & = & b \end{array}$$

Markieren Sie dabei jeweils die Zeilenstufenform, und geben Sie das zugehörige Gleichungssystem an. Bringen Sie die Koeffizientenmatrix dann in reduzierte Zeilenstufenform, und geben Sie die Lösungsmenge an.

(b) Die erweiterte Koeffizientenmatrix eines linearen Gleichungssystems $Ax = b$, mit einem Parameter $c \in \mathbb{R}$, ist wie folgt gegeben:

$$(A \mid b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & \mid & 9 \\ 0 & -3 & 1 & \mid & -17 \\ 0 & 0 & 0 & \mid & c \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Lösungsmenge in Abhängigkeit von c.

A22. **Hausaufgabe, bitte vor Beginn der 5. Übung (oder im Lernraum) unter Angabe von Name, Matrikelnummer, Übungsgruppe und ÜbungsleiterIn abgeben.**

(a) Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem über $\mathbb{R}$ mit dem Gauß–Jordan-Verfahren.

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 3 \\ x_1 & + & 3x_2 & & & + & 4x_4 & = & 9 \\ -2x_1 & - & 3x_2 & + & 3x_3 & + & 2x_4 & = & -4 \end{array}$$

Kennzeichnen Sie die Zeilenstufenform.

(b) Bestimmen Sie, mit Hilfe des Gauß–Jordan-Verfahrens, alle Parameter $a, b \in \mathbb{R}$, sodass das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & 7x_3 & = & 1 \\ & & -x_2 & + & 5x_3 & = & b \\ x_1 & + & x_2 & + & ax_3 & = & -3 \end{array}$$

(i) keine Lösung, (ii) genau eine Lösung, (iii) unendlich viele Lösungen besitzt.

H23. (a) Bestimmen Sie alle Parameterwerte $a, b \in \mathbb{R}$, so dass das lineare Gleichungssystem über $\mathbb{R}$

$$\begin{array}{rcrcr} x_1 & + & ax_2 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & = & b \end{array}$$

(i) keine Lösung, (ii) genau eine Lösung, (iii) unendlich viele Lösungen besitzt.

(b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des folgenden linearen Gleichungssystems über GF(2).

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wie viele Elemente hat die Lösungsmenge?

Hinweis: Die Lösungsmenge ist ein Hamming-Code.

H24. (a) Bestimmen Sie die Lösungsmenge der linearen Gleichungssysteme aus H17(b) und H18(a).

(b) Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem über $\mathbb{C}$ mit dem Gauß–Jordan-Verfahren.

$$\begin{array}{rcrcrcr} -z_1 & + & 2z_2 & + & z_3 & = & -1+2i \\ iz_1 & - & 3iz_2 & + & 6z_3 & = & 1+i \end{array}$$