TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Bereich Mathematik und Naturwissenschaften, Fakultät Mathematik, Institut für Algebra

Prof. Dr. Ulrike Baumann, Dr. Henri Mühle. Wintersemester 2019/20

5. Kurzlösung zur Vorlesung "Einführung in die Mathematik für Informatiker – Lineare Algebra"

Vektorräume

H29. (a) U_1 lässt sich nicht als Spannraum darstellen, also müssen wir die Vektorraumaxiome überprüfen. Mit $x = 1$ und $y = -1$ folgt $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \in U_1$; also gilt (U1).

Seien $u_1, u_2 \in U_1$. Also gibt es geeignete $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$, sodass

$$\begin{aligned} u_1 + u_2 &= \begin{pmatrix} x_1 - 1 \\ x_1 + y_1 \\ y_1 + 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 - 1 \\ x_2 + y_2 \\ y_2 + 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (x_1 + x_2 - 1) - 1 \\ (x_1 + x_2 - 1) + (y_1 + y_2 + 1) \\ (y_1 + y_2 + 1) + 1 \end{pmatrix} \in U_1; \end{aligned}$$

also gilt (U2). Seien weiter $a \in \mathbb{R}$ und $u \in U_1$. Dann gibt es geeignete $x, y \in \mathbb{R}$, sodass

$$\begin{aligned} au &= a \begin{pmatrix} x - 1 \\ x + y \\ y + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(x-1) \\ a(x+y) \\ a(y+1) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (ax - a + 1) - 1 \\ (ax - a + 1) + (ay + a - 1) \\ (ay + a - 1) + 1 \end{pmatrix} \in U_1; \end{aligned}$$

also gilt (U3). Also ist U_1 ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^3$.

Damit der Nullvektor in U_2 liegt, müsste $x = -2$ gelten, und gleichzeitig $y = -2$ und $y = -4$. Das ist aber ein Widerspruch. Also ist U_2 kein Untervektorraum des $\mathbb{R}^3$.

(b) M_c ist genau dann ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^3$, wenn $c = 0$.

(c) Es sei 0 das neutrale Element bzgl. der Addition in $\mathbb{K}$, und es sei o der Nullvektor von V. Sei $v \in V$. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass $0 \odot v = o$. Offenbar ist $1 - 1 = 0$ in $\mathbb{K}$, also ist

$$\begin{aligned} v \oplus -v &\overset{(V5)}{=} o = 0 \odot v = (1-1) \odot v \\ &\overset{(V9)}{=} (1 \odot v) \oplus \big((-1) \odot v\big) \overset{(V7)}{=} v \oplus \big((-1) \odot v\big). \end{aligned}$$

Wegen der Eindeutigkeit des inversen Vektors folgt $-v = (-1) \odot v$.

H30. (a) Das Gleichungssystem mit den sechzehn Gleichungen in sechzehn Unbekannten lautet:

$$
\begin{aligned}
-8a_0 + 4b_0 - 2c_0 + d_0 &= 0 \\
-a_1 + b_1 - c_1 + d_1 &= \frac{1}{6} \\
d_2 &= \frac{2}{3} \\
a_3 + b_3 + c_3 + d_3 &= \frac{1}{6} \\
8a_3 + 4b_3 + 2c_3 + d_3 &= 0 \\
-a_0 + b_0 - c_0 + d_0 &= \frac{1}{6} \\
d_1 &= \frac{2}{3} \\
a_2 + b_2 + c_2 + d_2 &= \frac{1}{6} \\
3a_0 - 2b_0 + c_0 &= 3a_1 - 2b_1 + c_1 \\
c_1 &= c_2 \\
3a_2 + 2b_2 + c_2 &= 3a_3 + 2b_3 + c_3 \\
-6a_0 + 2b_0 &= -6a_1 + 2b_1 \\
2b_1 &= 2b_2 \\
6a_2 + 2b_2 &= 6a_3 + 2b_3 \\
-12a_0 + 2b_0 &= 0 \\
12a_3 + 2b_3 &= 0
\end{aligned}
$$

(b) Nachrechnen!