TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Bereich Mathematik und Naturwissenschaften, Fakultät Mathematik, Institut für Algebra

Prof. Dr. Ulrike Baumann, Dr. Henri Mühle. Wintersemester 2019/20

5. Übungsblatt zur Vorlesung
"Einführung in die Mathematik für Informatiker – Lineare Algebra"

Vektorräume

Ü25. Zeigen Sie, dass die folgenden Strukturen $\mathbb{R}$-Vektorräume sind.

(a) Die Menge M aller Abbildungen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit den Operationen

$$(f \oplus g)(x) = f(x) + g(x) \quad \text{und} \quad (a \odot f)(x) = a \cdot f(x)$$

für alle $f, g \in M$, $a, x \in \mathbb{R}$.

(b) Die Menge $M = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit den Operationen

$$x \oplus y = x \cdot y \quad \text{und} \quad a \odot x = x^a$$

für alle $x, y \in M$, $a \in \mathbb{R}$.

Ü26. Sei V ein Vektorraum, und seien U_1, U_2 Untervektorräume von V. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

(i) Der Durchschnitt $U_1 \cap U_2$ ist ein Untervektorraum von V.

(ii) Die Vereinigung $U_1 \cup U_2$ ist ein Untervektorraum von V.

Ü27. Untersuchen Sie, ob die folgenden Mengen U Untervektorräume der gegebenen Vektorräume V sind.

(a) $V = \mathbb{R}^2, \quad U = \left\{ \begin{pmatrix} x+1 \\ 2x \end{pmatrix} \;\middle|\; x \in \mathbb{R} \right\}.$

(b) $V = \mathbb{R}^2, \quad U = \left\{ \begin{pmatrix} 2x-y \\ x+4y \end{pmatrix} \;\middle|\; x, y \in \mathbb{R} \right\}.$

(c) $V = \mathbb{R}^2, \quad U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \;\middle|\; x, y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 \leq 1 \right\}.$

(d) $V = \mathbb{C}^3, \quad U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \;\middle|\; x, y, z \in \mathbb{C}, x = iy - (2+i)z \right\}.$

A28. **Hausaufgabe, bitte vor Beginn der 6. Übung (oder im Lernraum) unter Angabe von Name, Matrikelnummer, Übungsgruppe und ÜbungsleiterIn abgeben.**

(a) Untersuchen Sie, ob die Mengen

(i) $U_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 2x+y \\ y-3z \\ 3x-4z \end{pmatrix} \;\middle|\; x,y,z \in \mathbb{R} \right\}$,

(ii) $U_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; x,y \in \mathbb{R}, x \geq 0, y \leq 0 \right\}$

Untervektorräume des $\mathbb{R}^3$ bilden. Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

(b) Zeigen Sie, dass die Menge

$$U = \left\{ f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(-1) = 0 \right\}$$

einen Untervektorraum des in Ü25(a) betrachteten Vektorraums bildet.

H29. (a) Untersuchen Sie, ob die Mengen

$$\text{(i)} \quad U_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x-1 \\ x+y \\ y+1 \end{pmatrix} \;\middle|\; x,y \in \mathbb{R} \right\}, \quad \text{(ii)} \quad U_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x-y \\ x+2 \\ -2x+y \end{pmatrix} \;\middle|\; x,y \in \mathbb{R} \right\}$$

Untervektorräume des $\mathbb{R}^3$ bilden. Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

(b) Für welche $c \in \mathbb{R}$ bildet die Menge

$$M_c = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \;\middle|\; x,y,z \in \mathbb{R}, x+y+z = c \right\}$$

einen Untervektorraum des $\mathbb{R}^3$? Begründen Sie Ihre Antwort.

(c) Beweisen Sie, dass in einem Vektorraum V für alle $u \in V$ gilt: $(-1) \cdot u = -u$.

H30. Bei der Lösung einer Interpolationsaufgabe geht es darum, ein Polynom $p(x)$ zu finden, dessen Graph gegebene Punkte (x_i, y_i) verbindet. Die Interpolation einer großen Punktmenge durch Polynome hohen Grades ist nicht immer sinnvoll, weil der Interpolationsfehler zu groß wird. Deshalb wird die Methode der Spline-Interpolation verwendet.

Für die Computergrafik sind kubische Splinefunktionen besonders wichtig. Das sind Polynome dritten Grades auf gegebenen Intervallen, aus denen man eine glatte Kurve zusammensetzen kann.

Gegeben ist folgende Wertetabelle.

i	0	1	2	3	4
x_i	-2	-1	0	1	2
y_i	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	0

Gesucht ist eine Funktion

$$s(x) = \begin{cases} p_0(x), & x_0 \le x < x_1, \\ p_1(x), & x_1 \le x < x_2, \\ p_2(x), & x_2 \le x < x_3, \\ p_3(x), & x_3 \le x \le x_4, \end{cases}$$

mit

$$p_i(x) = a_i x^3 + b_i x^2 + c_i x + d_i,$$

für $i \in \{0, 1, 2, 3\}$, die folgende Bedingungen an sich und ihre Ableitungen erfüllt:

$$\begin{array}{ll} s(x_i) = y_i & \text{für } i \in \{0,1,2,3,4\}, \\ \left.\begin{array}{l} p_{i-1}(x_i) = p_i(x_i) \\ p'_{i-1}(x_i) = p'_i(x_i) \\ p''_{i-1}(x_i) = p''_i(x_i) \end{array}\right\} & \text{für } i \in \{1,2,3\}, \\ s''(x_0) = s''(x_4) = 0. & \end{array}$$

Die Funktion $s(x)$ nennt man *natürliche kubische Splinefunktion*. Grundlagen zu Splinefunktionen werden im Modul "Mathematische Methoden für Informatiker" vermittelt.

(a) Stellen Sie das lineare Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten a_i, b_i, c_i, d_i, mit $i \in \{0, 1, 2, 3\}$, für $s(x)$ zur gegebenen Wertetabelle auf.

(b) Die gesuchte Funktion ist

$$s(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}x^3 + x^2 + 2x + \frac{4}{3}, & -2 \le x < -1, \\ -\frac{1}{2}x^3 - x^2 + \frac{2}{3}, & -1 \le x < 0, \\ \frac{1}{2}x^3 - x^2 + \frac{2}{3}, & 0 \le x < 1, \\ -\frac{1}{6}x^3 + x^2 - 2x + \frac{4}{3}, & 1 \le x \le 2. \end{cases}$$

Führen Sie die Probe durch.