TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Bereich Mathematik und Naturwissenschaften, Fakultät Mathematik, Institut für Algebra

Prof. Dr. Ulrike Baumann, Dr. Henri Mühle. Wintersemester 2019/20

6. Kurzlösung zur Vorlesung "Einführung in die Mathematik für Informatiker – Lineare Algebra"

Lineare Unabhängigkeit

Ü32. (i) Wir betrachten gleich die erweiterte Koeffizientenmatrix mit w_1 und w_2 auf der rechten Seite, und erhalten mit dem Gauß–Jordan-Algorithmus:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & | & 4 & 3 \\ -1 & 0 & -2 & | & -1 & 0 \\ 6 & -2 & 6 & | & 0 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 2 & | & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 3 & | & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Also ist $\{v_1, v_2, v_3\}$ linear abhängig, und somit auch kein Erzeugendensystem des $\mathbb{R}^3$.

(ii) Aus der obigen Zeilenstufenform erkennen wir, dass $B_1 = \{v_1, v_2\}$ eine Basis von U ist; es folgt $\dim(U) = 2$. Insbesondere kommen also nur zweielementige Teilmengen von $\{v_1, v_2, v_3\}$ als Basen von U in Frage. Da $v_3 \neq c_1v_1$ und $v_3 \neq c_2v_2$ für alle $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ gilt, sind $B_2 = \{v_1, v_3\}$ und $B_3 = \{v_2, v_3\}$ ebenfalls Basen von U.

(iii) Aus der obigen Zeilenstufenform lesen wir ab, dass $w_1 \in U$ (vierte Spalte) und $w_2 \notin U$ (fünfte Spalte). Um die Koordinaten von w_1 bzgl. der Basis B_1 zu bestimmen, genügt es, die erste, zweite und vierte Spalte der reduzierten Zeilenstufenform zu betrachten, woraus folgt

$$w_1 = v_1 + 3v_2 \quad \text{bzw.} \quad [w_1]_{B_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Um den Koordinatenvektor bzgl. B_2 zu bestimmen, lösen wir das Gleichungssystem, das zur ersten, dritten und vierten Spalte gehört, und erhalten

$$w_1 = -v_1 + v_3 \quad \text{bzw.} \quad [w_1]_{B_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Den Koordinatenvektor bzgl. B_3 erhalten wir analog aus der zweiten, dritten und vierten Spalte, und es folgt

$$w_1 = \frac{3}{2}v_2 + \frac{1}{2}v_3 \quad \text{bzw.} \quad [w_1]_{B_2} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Ü33. (i) Es ist

$$U = \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\left(\left\{\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-5\\7\end{pmatrix}\right\}\right).$$

Da beide Spannvektoren linear unabhängig sind, bilden sie eine Basis von U, und es folgt $\dim(U) = 2$.

(ii) Es ist

$$U = \mathrm{Span}_{\mathrm{GF}(2)}\left(\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}\right).$$

Der vierte Vektor ist die Summe der ersten drei, diese sind aber linear unabhängig. Also ist $\dim(U) = 3$ und $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$ eine Basis.

(iii) Analog zu (b) ist $\dim(U) = 2$ und $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ eine Basis.

H35. Sei o der Nullvektor von V.

(a) Seien $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}$ derart, dass

$$\begin{aligned} o &= k_1 v_1 + k_2(v_1 - v_2) + k_3(v_1 - v_2 - v_3) \\ &= (k_1 + k_2 + k_3)v_1 - (k_2 + k_3)v_2 - k_3 v_3. \end{aligned}$$

Da $\{v_1, v_2, v_3\}$ linear unabhängig ist, folgt $k_1 + k_2 + k_3 = 0$, $k_2 + k_3 = 0$, sowie $k_3 = 0$. Insgesamt ergibt sich damit aber $k_1 = k_2 = k_3 = 0$, also ist auch $\{v_1, v_1 - v_2, v_1 - v_2 - v_3\}$ linear unabhängig.

(b) Seien $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ derart, dass

$$u = k_1(u + 2v) + k_2(2u + v) = (k_1 + 2k_2)u + (2k_1 + k_2)v.$$

Damit diese Gleichung gilt, muss $k_1 + 2k_2 = 1$ und $2k_1 + k_2 = 0$ gelten. Die Lösung dieses linearen Gleichungssystems ist $k_1 = -\frac{1}{3}$ und $k_2 = \frac{2}{3}$, also ist

$$u = -\frac{1}{3}(u + 2v) + \frac{2}{3}(2u + v) \in \mathrm{Span}(T).$$

Da $u + 2v$ kein Vielfaches von $2u + v$ ist, folgt $\dim\big(\mathrm{Span}(T)\big) = 2$.

H36. (a) Sei $T \subseteq V$ mit $|T| > n$. Nehmen wir an, dass T linear unabhängig ist. Da jede linear unabhängige Menge von Vektoren zu einer Basis ergänzt werden kann, gibt es also eine Basis B von V, mit $T \subseteq B$. Die Dimension von V ist als die Kardinalität einer Basis von V definiert, und es folgt

$$n = \dim(V) = |B| \geq |T| > n,$$

was ein Widerspruch ist. Also ist T linear abhängig.

(b) Sei U ein Untervektorraum von V mit Basis B. Insbesondere ist B linear unabhängig und lässt sich also zu einer Basis von V erweitern. Es folgt $\dim(U) \leq \dim(V)$. Wenn $U \neq V$ ist, dann gibt es ein $v \in V \setminus U$, und v lässt sich nicht als Linearkombination der Elemente von B darstellen. Also ist auch $B \cup \{v\}$ linear unabhängig, und lässt sich zu einer Basis von V erweitern. Es folgt $\dim(U) < \dim(V)$.