TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Bereich Mathematik und Naturwissenschaften, Fakultät Mathematik, Institut für Algebra

Prof. Dr. Ulrike Baumann, Dr. Henri Mühle. Wintersemester 2019/20

6. Übungsblatt zur Vorlesung "Einführung in die Mathematik für Informatiker – Lineare Algebra"

Lineare Unabhängigkeit

Ü31. Sei V ein Vektorraum, und seien $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$. Sei weiter $T = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Die Menge T ist genau dann linear unabhängig, wenn für jedes $w \in \operatorname{Span}(T)$ die Darstellung von w als Linearkombination von $v_1, v_2, \ldots, v_n$ eindeutig ist.

(b) Die Menge T ist genau dann linear abhängig, wenn es ein $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ gibt, sodass $v_i \in \operatorname{Span}\bigl(T \setminus \{v_i\}\bigr)$ ist.

Ü32. Gegeben sind die Vektoren aus $\mathbb{R}^3$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad w_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},$$

sowie der Unterraum $U = \operatorname{Span}\bigl(\{v_1, v_2, v_3\}\bigr)$.

(i) Ist die Menge $\{v_1, v_2, v_3\}$ linear unabhängig? Bildet Sie ein Erzeugendensystem des $\mathbb{R}^3$?

(ii) Bestimmen Sie alle Teilmengen der Menge $\{v_1, v_2, v_3\}$, die eine Basis von U bilden. Welche Dimension hat U?

(iii) Liegen die Vektoren w_1 und w_2 in U? Berechnen Sie gegebenenfalls den zugehörigen Koordinatenvektor bzgl. der in (ii) gefundenen Basen von U.

Ü33. Bestimmen Sie eine Basis und die Dimension der folgenden Untervektorräume U der gegebenen Vektorräume V:

(i) $V = \mathbb{R}^2, \quad U = \left\{ \begin{pmatrix} 2x - 5y \\ x + 7y \end{pmatrix} \;\middle|\; x, y \in \mathbb{R} \right\},$

(ii) $V = \mathrm{GF}(2)^4, \quad U = \left\{ \begin{pmatrix} a + b \\ a + d \\ c + d \\ a + b + c + d \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b, c, d \in \mathrm{GF}(2) \right\},$

(iii) $V = \mathrm{GF}(2)^3, \quad U = \operatorname{Span}\left(\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right).$

A34. **Hausaufgabe, bitte vor Beginn der 7. Übung (oder im Lernraum) unter Angabe von Name, Matrikelnummer, Übungsgruppe und ÜbungsleiterIn abgeben.**

(a) Beweisen Sie: Jede Menge von Vektoren, die den Nullvektor enthält, ist linear abhängig.

(b) Gegeben sind die folgenden vier Vektoren aus $\mathbb{R}^3$:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie alle Teilmengen von $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, die eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden.

H35. Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.

(a) Es sei $\{v_1, v_2, v_3\}$ eine linear unabhängige Teilmenge von V. Zeigen Sie, dass die Menge $\{v_1, v_1 - v_2, v_1 - v_2 - v_3\}$ ebenfalls linear unabhängig ist.

(b) Es sei $\{u, v\} \subseteq V$ linear unabhängig und $T = \{u + 2v, 2u + v\}$. Untersuchen Sie, ob $u \in \text{Span}(T)$ gilt, und stellen Sie ggf. u als Linearkombination der Elemente von T dar. Welche Dimension hat $\text{Span}(T)$?

H36. Sei V ein Vektorraum mit $\dim(V) = n$. Beweisen Sie folgende Aussagen.

(a) Jede Menge von mehr als n Vektoren ist linear abhängig.

(b) Für jeden Untervektorraum U von V, mit $U \neq V$, gilt $\dim(U) < \dim(V)$.